

質能均衡講義

第一回

503320-1



社團
法人
考
試
法

考
友
社

出版
發行

第一講 緒 論

命題重點

一、因次與單位 (*Dimensions and Units*)

在解題時，因次與單位的正確使用極為重要，如果稍不注意，很容易導致錯誤，甚至無法解出。

正確使用因次與單位，不僅可以免除不必要的錯誤，同時對於分析題目求取解答亦大有助益。

因次是量度的基本概念，諸如長度、時間、質量、溫度……等。單位則是用以表達因次的工具，如表示長度用呎、厘米，時間用小時、秒，質量用克、磅……等。

表 1-1 及表 1-2 所列者係常用的因次及表達各因次的單位。

表 1-1 因次與單位——基本量

基本量 (因次)	符 號	公制 (<i>cgs</i> 制) 單位	美工程制單位
質 量	M	克 (g)	磅質量 (lb_m)
長 度	L	厘米 (cm)	呎 (ft)
時 間		秒 (sec)	秒 (sec)
溫 度 差	t 或 T	$^{\circ}C$ 或 $^{\circ}K$	$^{\circ}F$ 或 $^{\circ}R$
力	F	達因 ($dyne$)	磅力 (lb_f)
熱	Q	卡 (cal)	英熱單位 (Btu)

表 1-2 因次與單位——誘導量

誘導量	符號	因次	公制單位	英工程制單位
密度	ρ	M/L^3	g/cm^3	lb_m/ft^3
比容	v	L^3/M	cm^3/g	ft^3/lb_m
壓力	p 或 P	F/L^2	$dyne/cm^2$	lb_f/ft^2
速度	u	L/θ	cm/sec	ft/sec
加速度	a	L/θ^2	cm/sec^2	ft/sec^2
黏度	μ	$M/L\theta$	$g/(cm)(sec)$	$lb_m/(ft)(sec)$
熱容	C	$Q/M\theta$	$cal/(g)(^\circ C)$	$Btu/(lb_m)(^\circ F)$

對於一切有因次的量，於解題時隨時把單位緊附在數字之後，有下列數點實用上的方便：

1. 可減少計算中某些部份疏忽倒置的可能。
2. 可將計算化為簡單的比值，便於計算尺的使用。
3. 減少中間的計算步驟，節省解題時間。
4. 能正確的瞭解題目，而毋須死記公式。
5. 能顯示出所用各數字的物理意義。

單位的處理頗為簡單，可如代數符號一樣處理。惟亟應注意者，不同的單位不能相加減，亦不可相乘除而消去單位，單位相同的量才可以這樣做。磅和磅，公尺和公尺可以相加，相減或相乘、相除，但絕不能以 5 公尺除 10 磅而得到 2。

單位的變換有三個簡單而重要的基本觀念：

第一、若 $a=b$ 則 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$

第二、 $a \times 1 = a$ ； $b \times 1 = b$

換句話說，一個量乘以 1，其值不變。因此，在任何時候，把計算中的任一項乘 1 仍不改變原值。

第三、365 天所表示的是 365×1 天；1000 磅 = 1000×1 磅；10 吋 = 10×1 吋等等。因此，60 和 60 秒代表完全不同的兩種量，

$60 = 60 \times 1$ 而 $60 \text{ 秒} = 60 \times 1 \text{ 秒}$ 。

$\therefore 1 \text{ 碼} = 3 \text{ 呎}$

$$\therefore \frac{3 \text{ 呎}}{1 \text{ 碼}} = \frac{1 \text{ 碼}}{3 \text{ 呎}} = 1$$

上式中的兩個分數稱為變換因子 (*Conversion factor*)。應注意者，第一個分數值並不是 3，第二個分數值也不是 $\frac{1}{3}$ ，所有的變換因子其數值均為 1。顯然，1 可以有很多不同的形式。

在實際的計算中，如果每次都像這樣做，就未免太冗長了！此處是爲了使考友易於瞭解變換運算的實質才這樣做。須再強調的一點，我們將這兩點間的距離由呎改爲碼，並不是“除以 3”。若是“除以 3”則所得的只是原值的 $\frac{1}{3}$ ！實際上，只是以適當的變換因子形式將這兩點間的距離乘 1。故，原值未變，所變者只是其單位而已。

用“除以 3”做，常易招致錯誤，有時會誤用爲“乘以 3”。如果我們使用了單位和變換因子，即使錯用了，也可以立刻覺察出來，可避免產生錯誤的結果，如：

$$30 \text{ ft} = 30 \text{ ft} \times \left(\frac{3 \text{ ft}}{1 \text{ yd}} \right) = 90 \frac{\text{ft}^2}{\text{yd}}$$

很顯然的，得到的不是所要的單位，在計算過程中必有錯誤。正確使用單位的習慣考友務須及早養成。

因在變換運算中，常須消去一些單位，故單位以次方簡寫代替文字說明較爲實用。例如：

<u>避免用:</u>	<u>使用:</u>
平方呎	ft^2
立方呎	ft^3
每小時哩	mile/hr
每平方吋磅力	$\text{lb}_f/\text{in.}^2$

例題：

有一新式飛機，其飛行速度為音速之三倍（音速約為 1100 ft/sec ），則其速度折合每小時多少哩？

〔解〕

$$\frac{3 \quad | \quad 1100 \text{ ft} \quad | \quad 1 \text{ mile} \quad | \quad 60 \text{ sec} \quad | \quad 60 \text{ min}}{\quad | \quad \text{sec} \quad | \quad 5280 \text{ ft} \quad | \quad 1 \text{ min} \quad | \quad 1 \text{ hr}} = 2250 \text{ mile/hr}$$

或

$$\frac{3 \quad | \quad 1100 \text{ ft} \quad | \quad 60 \frac{\text{mile}}{\text{hr}}}{\quad | \quad \text{sec} \quad | \quad 88 \frac{\text{ft}}{\text{sec}}} = 2250 \text{ mile/hr}$$

上例中使用所謂的因次方程式 (*Dimensional equation*)。它包含了單位和數字。原速度 3300 ft/sec 乘幾個比值為 1 的變換因子而求得所要的答案。

因次方程式中有豎線把各個比值分開，這些豎線實際上有相乘的意義。本文將採用這種型式的因次方程式，以使考友在解題時心裡清晰記住單位的重要性。

在因次方程式中的任何位置，可先綜合一下，看淨餘的單位是什麼，再決定還需要作那些變換。下列方式是一頗為方便的作法：在因次方程式下另畫斜線，把綜合後的單位記於線下，以目視法消去並累積單位。

$$\frac{3 \times 1100 \text{ ft} \quad | \quad 1 \text{ mile} \quad | \quad 60 \text{ sec} \quad | \quad 60 \text{ min}}{\quad | \quad \text{sec} \quad | \quad 5280 \text{ ft} \quad | \quad 1 \text{ min} \quad | \quad 1 \text{ hr}}$$

$\frac{\text{mile}}{\text{sec}} \quad \frac{\text{mile}}{\text{min}}$

單位系統有許多不同的種類，其中最常用的是公制，即 *cgs* 制 (*cgs system*)，英工程制 (*British engineering system*)，與美工程制 (*American engineering system*)。公制和英工程制皆含三個基本量即長度、質量及時間。但在美工程制中則含有四個基本量（第四基本量為力），因此在美工程制中，需要另外加上一個變換因子 (g_c)，以便得到適當的單位。在此制中，力的單位與公制或英工程制迥然不同。

根據牛頓第二運動定律 (*Newton's second law of motion*): “運動之變更係與加於其上之運動力成正比，並發生在力之直線方向”。因此，力可視為單位時間內動量 (*Momentum*) 之變化量。

$$\text{即} \quad F \propto \frac{d(mu)}{d\theta} \quad (1-1)$$

其中 F = 力 (*force*)

m = 質量 (*mass*)

u = 速度 (*velocity*)

θ = 時間 (*time*)

mu = 動量 (*momentum*)

$$F = c \frac{d(mu)}{d\theta} \quad (1-2)$$

因運動過程中，質量不變

$$\text{故} \quad F = cm \frac{du}{d\theta} \quad (1-3)$$

c 為比例常數，其數值與單位隨 F , m , u 所用之單位不同而異。

式 (1-3) 中

$$\frac{du}{d\theta} = \text{加速度 (Acceleration, } a)$$

$$\text{即} \quad F = cma \quad (1-4)$$

精選試題

1. 求: (a) 1厘米+5 秒
(b) 1馬力+200 瓦特

[解]

(a) 厘米 與 秒 代表兩種完全不同的因次。

因此, 1 厘米+5 秒 是毫無意義的。

(b) 1 馬力 與 200 瓦特 單位雖不同, 但因次却相同 (都是單位時間的能量), 將之化爲相同的單位即可相加。

$$\because 1 \text{ 馬力} = 745.7 \text{ 瓦特}$$

$$\therefore 745.7 \text{ 瓦特} + 200 \text{ 瓦特} = 945.7 \text{ 瓦特}$$

2. 兩點間的距離爲30呎, 試將此距離改用碼表示。

[解]

$$30 \text{ ft} = 30 \times 1 \text{ ft}$$

以適當的變換因子形式乘 1

$$\begin{aligned} 30 \text{ ft} &= 30 \times 1 \text{ ft} \times \left(\frac{1 \text{ yd}}{3 \text{ ft}} \right) \\ &= 30 \times 1 \text{ ft} \times \left(\frac{1 \text{ yd}}{3 \times 1 \text{ ft}} \right) \\ 30 \text{ ft} &= 10 \times 1 \text{ yd} = 10 \text{ yd} \end{aligned}$$

3. 將 $400 \text{ in.}^3/\text{day}$ 變換爲 cm^3/min

[解]

$$\frac{400 \text{ in.}^3}{\text{day}} \left| \left(\frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in.}} \right)^3 \right| \left| \frac{1 \text{ day}}{24 \text{ hr}} \right| \left| \frac{1 \text{ hr}}{60 \text{ min}} \right| = 4.56 \text{ cm}^3/\text{min}$$

4. 理想氣體方程式 $PV=nRT$ 中, 通用的氣體常數 R 單位爲何?

[解]

理想氣體方程式俟第三講將作討論。此處將 $PV=nRT$ 重行排列

爲：

$$R = \frac{PV}{nT}$$

P, V, n, T 各代入不同的單位，即可求得 R 之單位。

如 $\frac{(atm)(liter)}{(g \text{ mole})(^\circ K)}$ 或 $\frac{(mm \text{ Hg})(ft^3)}{(lb \text{ mole})(^\circ R)}$

須注意者， R 之數值隨單位的不同而異。

5. 一質量 100 磅之物體，置於高出地面 10 呎處，試求其位能爲若干呎磅力？

[解]

位能 = (質量) × (重力加速度) × (高度)

$$P.E. = m \times g \times h$$

因高度變化不大，設 $g = 32.174 \text{ ft/sec}^2$

$$\begin{aligned}
 P.E. &= \frac{100 \text{ lb}_m \mid 32.174 \text{ ft/sec}^2 \mid 10 \text{ ft}}{32.174 \frac{(\text{ft})(\text{lb}_m)}{(\text{sec})^2(\text{lb}_f)}} \\
 &= 1000(\text{ft})(\text{lb}_f) \qquad (1-6)
 \end{aligned}$$

請注意，在本題中

$$\frac{g}{g_c} = \frac{32.174 \text{ ft/sec}^2}{32.174(\text{ft})(\text{lb}_m)/(\text{sec})^2(\text{lb}_f)} = \frac{1 \text{ lb}_f}{\text{lb}_m}$$

有些初學者解此問題，常直接以

$$100 \text{ lb}_m \times 10 \text{ ft} = 1000(\text{lb}_m)(\text{ft}) \qquad (1-7)$$

所得數值雖與式 (1-6) 中者相同，但單位却不同！因此，有時雖不乘上 $1/g_c$ 亦可得相同之數值，但實際上其意義却完全不同，此點必須特別留意。許多工程書籍上採用 $P.E. = mgh/g_c$ 表示位能，以避免忘記使用變換因子。

6. 十呎高的水柱，於 60°F 時，其壓力爲若干磅力/呎²？（只考慮受到地心之引力）