

工程統計講義

第一回

302212-1



社團
法人
考試
證照
考試
升學
考試
檢定
考試

考友社

出版
發行
考試
證照
考試
升學
考試
檢定
考試

工程統計講義第一回 目錄

第一講 機率	1
一、樣本空間	1
二、事件	2
三、計算樣本點	3
四、事件發生的機率	5
五、加法法則	6
六、條件機率	7
七、乘法法則	8
八、貝貽法則	10
◆精選試題◆	13
第二講 隨機變數	20
一、隨機變數	20
二、離散機率分配	20
三、連續機率分配	22
四、聯合機率分配	24
◆精選試題◆	31
第三講 數學期望值	44
一、隨機變數之平均數	44
二、變異數和協方差	47
三、平均數和變異數的性質	51
四、契比雪夫定理	56
◆精選試題◆	58

第一講 機率

◎ 命題重點 ◎

一、樣本空間

(一) 樣本空間

在學習統計學時我們基本上所考慮的便是在某一既定的研究或科學觀察中對於機會結果 (chance outcomes) 的表達和闡釋。例如，我們可以記錄每月發生於 Driftwood 巷道和 Royal Oak 車道交叉處的車禍次數，以瞭解是否應裝設交通號誌；我們可以將裝配線上卸下的貨物區分為“不良品”或“良品”；或者我們有興趣研究當酸的濃度改變時在一化學反應中逸出氣體的體積。因此，統計學家常處理數值資料 (numerical data) 以表示次數 (counts) 或測定值 (measurements)，或致力於可依據某些判斷標準 (criterion) 而加以分類的類別資料 (categorical data)。

我們將任何一種資料的記錄，不論其為數值的或類別的均稱之為觀測 (observation)。因此數字 2, 0, 1, 2，代表去年元月至四月間在 Driftwood 巷道和 Royal Oak 車道交叉處每月所發生的車禍次數，構成了一組觀測。同樣地，類別資料 N, D, N, N, D，代表 5 個貨物的檢視結果 (N 表良品，D 表不良品) 也構成了一組觀測記錄。

統計學家用實驗 (experiment) 這個字眼來描述產生一組資料的程序 (process)。投擲一枚銅板便是統計實驗的一個非常簡單的例子，在此實驗裏只有兩種可能的結果，正面 (heads) 或反面 (tails)。另一個實驗可能是發射一枚飛彈和在特定時刻觀測其速度。選民對於新增銷售稅的意見也可考慮為一個實驗的觀測。我們特別有興趣於經由反覆許多次實驗所得的觀測。在大多數的情況下結果 (outcomes) 與機會相關，因而無法肯定推斷。如果一位化學家在同一狀況下進行一分析數次，得到不同的測定值，這可視為實驗的程序中有一種機會的成分。即使反覆投擲一硬幣，我們無法確知某次投擲是否為正面。然而，我們確知每一次投擲的整體集合的機率。

定義 1：一項統計的實驗的所有可能結果所成的集合稱為樣本空間 (sample space)，用符號 S 代表。

(二) 元素

在一個樣本空間中每一結果稱為此樣本空間的一元素 (element) 或一分子 (member)，亦可簡稱為樣本點 (sample point)。

【例一】：

投擲一硬幣可能出現的結果所組成的樣本空間 S 為

$$S = \{H, T\},$$

此處 H 和 T 分別代表“正面”和“反面”。

(三)多樣本點的表示

有相當多或無限多樣本點的樣本空間最好以一項陳述 (statement) 或規則 (rule) 來說明。例如，若某項實驗的結果是世界上人口超過一百萬的都市所成的集合，我們的樣本空間可寫成

$$S = \{X \mid X \text{ 是一個人口超過1百萬的城市}\}$$

可以讀成“S是所有使得人口超過一百萬的城市所成的集合”。

二、事件

(一)事件

定義2：事件 (event) 為樣本空間之一子集合。

【例二】：

給定樣本空間 $S = \{t \mid t \geq 0\}$ ，此處 t 指某一電子元件的壽命 (以年計)，那麼此元件在第五年尾之前失效的事件 A 為 S 之一子集合。 $A = \{t \mid 0 \leq t < 5\}$ 。

(二)餘集合

定義3：樣本空間 S 中事件 A 的餘集合 (complement) 是由 S 中所有不在 A 中的元素所成之集合。我們以符號 A' 表事件 A 之餘集合。

【例三】：

設 R 為由52張牌中選中一紅牌之事件，且令 S 表整副紙牌。那麼 R' 表選中之牌為黑牌而不為紅牌之事件。

(三)交集

定義4：事件 A 和事件 B 的交集 (intersection) 以符號 $A \cap B$ 表示，代表一包含事件 A 和事件 B 的共同元素的事件。

【例四】：

令 P 為一事件，表示在一大眾化自助餐廳用餐人中任選一人為納稅人 (taxpayer)，並令 Q 表一事件，表該名顧客超過65歲。那麼事件 P 和 Q 之交集便是在該自助餐廳中年逾65歲的納稅人。

(四)互斥

定義5：若 $A \cap B = \phi$ ，則稱事件 A 和事件 B 為互斥 (mutually exclusive)，亦即，若事件 A 和事件 B 沒有共同的元素則稱此二事件互斥。

【例五】：

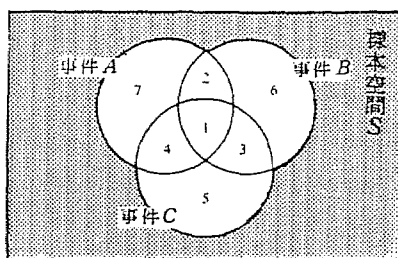
一個有線電視公司在8個不同頻道上提供節目，其中三個屬於ABC聯盟，二個屬於NBC聯盟，另一個屬於CBS聯盟。其他二個分別是教育頻道和ESPN運動頻道。假設接受此收視服務的某人未經選擇頻道便打開電視機，令 A 表此時播出之節目屬於NBC電視通訊網，事件 B 則表該節目屬於CBS電視通訊網。因為同一節目不可能屬於一個以上的通訊網，事件 A 和事件 B 不可能有共同的節目。因此，事件 A 和事件 B 的交集 $A \cap B$ 不包含任何節目，因此事件 A 和事件 B 為互斥。

定義6：事件A和事件B的聯集（union），可以符號 $A \cup B$ 表示，是指包含了A或B或二者的所有元素之事件。

【例六】：

令 $A = \{a, b, c\}$ 且 $B = \{b, c, d, e\}$ ；則 $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ 。

諸事件和相應的樣本空間之間的關係可藉凡氏圖（Venn diagrams）加以圖示。在凡氏圖中我們以一矩形表樣本空間，並以位於矩形內之諸圓代表諸事件，如圖一，吾人可得



圖一 以不同區域代表諸事件

$A \cap B =$ 區域1和2，

$B \cap C =$ 區域1和3，

$A \cup C =$ 區域1, 2, 3, 4, 5, 和7，

$B' \cap A =$ 區域4和7，

$A \cap B \cap C =$ 區域1，

$(A \cup B) \cap C' =$ 區域2, 6, 7，

等等。

三 計算樣本點

(一) 乘法原理

定理1：若某項運算有 n_1 種方式可行，且若其中每一種方式亦各有 n_2 種方式可行，則此二運算之共同執行可有 $n_1 n_2$ 種方式。

【例七】：

擲一對骰子一次，在樣本空間中產生多少樣本點？

【解】：

第一枚骰子有 $n_1 = 6$ 種方式著地，對於此6種方式之每一種方式，第二枚骰子亦可有 $n_2 = 6$ 種方式著地。因此，一對骰子著地的方式可有 $n_1 n_2 = (6)(6) = 36$ 種可能的方式。

【例八】：

假設午餐包含湯、三明治，正餐後甜點及飲料各一種，現有4種湯、3種三明治、5種正餐後的甜點、和4種飲料可供選擇，則安排午餐的方法有幾種？

【解】：

因為 $n_1 = 4$ ， $n_2 = 3$ ， $n_3 = 5$ ，且 $n_4 = 4$ ，因此共有 $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 4 \times 3 \times 5$

$\times 4 = 240$ 種不同的方式可供選擇。

(二)排列

定義7：排列係指對一組物體之全部或部分的一項安排。

【例九】：

考慮a, b, c三個字母。可能的排列有abc, acb, bac, bca, cab和cba。如此我們可見六種不同的安排。

1. 定理2：n種不同物體的排列數為n！。
2. 定理3：n種不同物體，一次取r個加以安排之排列數為

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

【例十】：

由20張樂得彩票中抽取2張為首獎和二獎。試找出樣本空間S的樣本點個數。

【解】：

樣本點總數為

$${}_{20} P_2 = \frac{20!}{18!} = (20)(19) = 380$$

3. 定理4：幾種不同物體沿一圓做安排，共有 $(n-1)!$ 種排列方法。

【例十一】：

4人玩橋牌，每人沿順時針排列，在考慮某人於一定位且安排餘三位，則有 $3! = 6$ 種方式。

4. 定理5：總數為n的物體中， n_1 屬第一類， n_2 屬第二類， \dots ， n_k 屬第k類，不同的排列數共有 $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ 種。

【例十二】：

有多少種不同的方式可將3紅燈、4黃燈，和2藍燈安排在有九燈座的一串聖誕樹裝飾燈之上？

【解】：

不同安排的總數為

$$\frac{9!}{3! 4! 2!} = 1260$$

5. 定理6：分割一個有n個元素的集合為r個子集合（或格），在第i格中有 n_i 個元素（ $i=1, 2, \dots, r$ ），的方法數為

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

此處 $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ 。

【例十三】：

有多少種方式可將7個科學家分配住宿：三人房一間，雙人房二

精選試題

下列出下列樣本空間中的元素：

- (a) 1至50間可被8整除之整數。
- (b) 集合 $S = \{X \mid X^2 + 4X - 5 = 0\}$
- (c) 擲一硬幣直至出現一反面或三正面的結果之集合。
- (d) 集合 $S = \{X \mid X \text{ 爲一洲}\}$
- (e) 集合 $S = \{X \mid 2X - 4 \geq 0 \text{ 且 } X < 1\}$

【解】(a) $\{8, 16, 24, 32, 40, 48\}$

(b) $\{1, -5\}$

(c) $\{T, HT, HHT, HHH\}$

(d) $\{\text{亞洲, 歐洲, 非洲, 北美洲, 南美洲, 澳洲, 南極洲}\}$

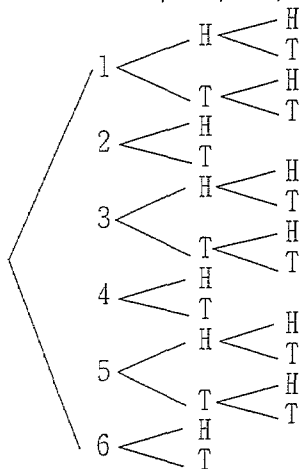
(e) ϕ

二、利用規則法 (rule method) 描述樣本空間 S , S 包含了在第一象限內以原點爲中心, 半徑爲3之圓內部的所有點。

【解】 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 9; x > 0, y > 0\}$

三、一實驗包含擲一骰子若出現偶點並須擲一硬幣乙次。若骰子出現奇點, 則須擲硬幣兩次。利用記號 $4H$ 表骰子出現4且之後硬幣出現正面, 餘如 $3HT$ 表骰子出現3而後擲硬幣先後出現一正面和一反面的事件, 造一樹形圖顯示樣本空間 S 中的18個元素。

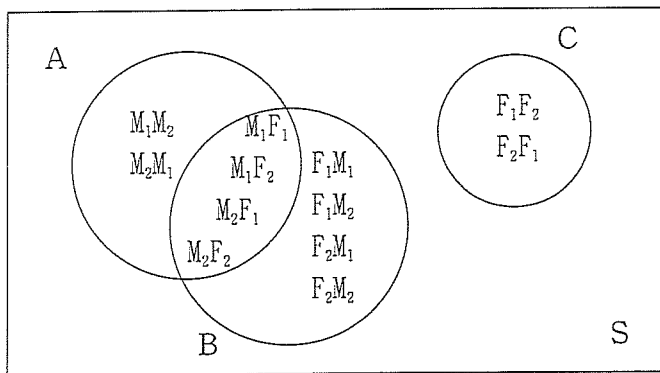
【解】 $\{2H, 2T, 4H, 4T, 6H, 6T, 1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 5HH, 5HT, 5TH, 5TT\}$



四應徵某大學心理學教職的2位男性的履歷和另2位女性的履歷放在一個檔案內。有2個缺可遞補，第一個的級職是助理教授，由4人中隨機選取乙名。第二個是講師缺，由所餘3人中選機選用。用符號 M_2F_1 表第一個缺由第二位男性補實且第二個缺續由第一位女性補實。

- 列出樣本空間 S 的元素。
- 列出相應於事件 A ，助理教授之缺由一名男性補實之 S 中的元素。
- 列出相應於事件 B ，2個缺中恰有一為男性補實之 S 中的元素。
- 列出相應於事件 C ，2個缺均非男性補實之 S 的元素。
- 列出相應於事件 $A \cap B$ 的 S 中的元素。
- 列出相應於事件 $A \cup C$ 的 S 中的元素。
- 造一凡氏圖以說明事件 A, B ，和 C 之間的相交及聯集。

- 【解】(a) $S = \{ M_1M_2, M_1F_1, M_1F_2, M_2M_1, M_2F_1, M_2F_2, F_1M_1, F_1M_2, F_1F_2, F_2M_1, F_2M_2, F_2F_1 \}$
 (b) $A = \{ M_1M_2, M_1F_1, M_1F_2, M_2M_1, M_2F_1, M_2F_2 \}$
 (c) $B = \{ M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2, F_1M_1, F_1M_2, F_2M_1, F_2M_2 \}$
 (d) $C = \{ F_1F_2, F_2F_1 \}$
 (e) $A \cap B = \{ M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2 \}$
 (f) $A \cup C = \{ M_1M_2, M_1F_1, M_1F_2, M_2M_1, M_2F_1, M_2F_2, F_1F_2, F_2F_1 \}$
 (g)



五一項含有9個問題的是非題測驗可能有多少種不同的作答結果？

【解】 $2^9 = 512$

六若選擇題測驗中有5道題，每道題有4個選項，但僅有一選項為正確。

- 一位學生對每一題均作答，答案卷上可有若干種變化？
- 一位學生對每一題均作答，全錯的答題方式有幾種？

【解】(a) $4^5 = 1024$