電磁學講義

第一回

502200-1

社團法人 考友社 出版發行

第一講　向量分析

命 題 重 點

一、純量和向量場

㈠純量：只包含大小和代數符號正負號的量，稱爲純量。例如質量、時間、溫度、功…等都是純量。

㈡向量：包含大小與方向的量稱爲向量。例如力，速度、位移、加速度…等都是向量。

㈢場：1.若一區域的每一個點，均有一相對應的物理函數之函數值，則此區域稱爲場。

2.純量場：若物理函數在每一點的函數值均爲純量，這個場就稱爲純量場。例如大氣層的溫度，地球表面距海平面的高度。

3.向量場：若物理函數在每一點的函數值均爲向量時，這個場就稱爲向量場。如大氣層中的風速，太空中某一質點所受的地心引力。

二、向量的運算

㈠向量的加法：

向量的加法　$A+B=B+A$　（交換律）

$(A+B)+C=A+(B+C)$　（結合律）

㈡純量與向量的乘積：

1. $uB=Bu$ ……………（交換律）
2. $u(vA)=(uv)A$………（結合律）
3. $(u+v)A=uA+vA$　（分配律）
4. $u(A+B)=uA+uB$　（分配律）

㈢向量的點積和叉積：

1.點積：

⑴兩個向量的點積是一個純量，其值等於兩向量的大小之積，再乘以兩向量間夾角的餘弦值：

$$A\cdot B=|A|\cdot|B|\cos\theta$$

⑵點積服從交換律和結合律：

$$A\cdot B=B\cdot A \quad （交換律）$$

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C \quad （結合律）$$

2.叉積：

⑴兩個向量的叉積是一個向量，其值等於兩向量的大小之積，再乘以兩向量間夾角的正弦值。其方向爲包含兩向量之平面的垂直方向。

(2)如果一個右旋的螺絲釘從第一個向量的方向，轉到第二個向量的方向（經過其間較小的夾角），則此螺絲釘前進的方向，即為向量叉積的方向。

$$A \times B = |A| \cdot |B| \sin\theta$$

$A \times B = -B \times A$ （叉積不具交換性）

(3)如以行列式表示

$$A \times B = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

3.三向量之積：

(1)$A \cdot (B \times C) = C \cdot (A \times B) = B \cdot (C \times A)$

B與C的叉積之值為B，C兩向量所組成之平行四邊形之面積，則$A \cdot (B \times C)$為A，B，C三向量所成之平行六邊體的體積。

(2)$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$

三重叉積$A \times (B \times C)$為垂直A及$(B \times C)$二向量之另一向量E，由於$(B \times C)$向量垂直於B及C故E向量應在B及C之平面內與A垂直故

$A \times (B \times C) = aB + bC$

(3)a及b為純量，由向量運換可得$a = A \cdot C$，$b = -A \cdot B$

故 $A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$

三向量等式

下列等式通常用於含有電磁等式問題的解答中

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi$$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

或 $\nabla^2 A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \times (\nabla \times A)$

$$\nabla \cdot (\phi A) = \phi(\nabla \cdot A) + A \cdot (\nabla \phi)$$

$$\nabla \times (\phi A) = \phi(\nabla \times A) + (\nabla \phi) \times A$$

$$\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$$

$$\nabla \times (A \times B) = A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A) + (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B$$

四向量之坐標表示法

(一)單位向量：

1.一向量其大小為 1 ，而無物理因次者謂之單位向量，故單位向量僅決定向量之空間方向。

2.設某一任意向量A（此向量可為任一物理量），根據上述定義，此向量之單位向

量　$\mathbf{a}_A = \mathbf{A}/A$（沿$A$方向之單位向量）

3.任一向量，可以該向量的大小及其單位向量之乘積表之。如

$\mathbf{A} = A\mathbf{a}_A$

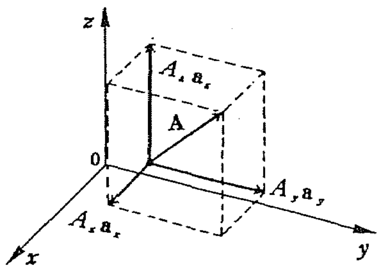
(二)向量之坐標表示法：

數學家發現，使用向量分析為工具，關係式的表示可以不需任何坐標系，而工程師在解問題時，則經常需要一組坐標。

例：　向量A的表示式：

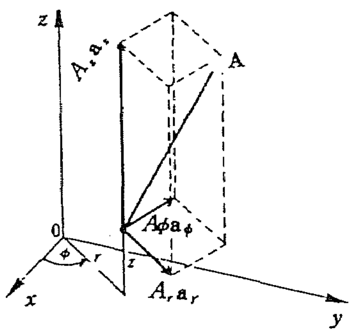
1.直角坐標：　$\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$

（x，y，z）



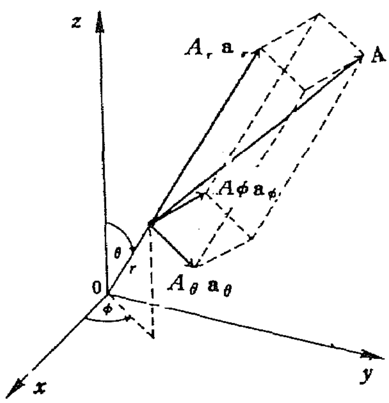
2.圓柱坐標：　$\mathbf{A} = A_r\mathbf{a}_r + A_\phi\mathbf{a}_\phi + A_z\mathbf{a}_z$

（r，ϕ，z）



3.球體坐標：　$\mathbf{A} = A_r\mathbf{a}_r + A_\theta\mathbf{a}_\theta + A_\phi\mathbf{a}_\phi$

（r，θ，ϕ）



(三)坐標變換：

1.球體坐標↔直角坐標：

(1) $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x = \sin\theta\cos\phi$

$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_y = \sin\theta\sin\phi$

$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z = \cos\theta$

(2) $\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_x = \cos\theta\cos\phi$

$\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_y = \cos\theta\sin\phi$

$\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_z = -\sin\theta$

(3) $\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_x = -\sin\phi$

$\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_y = \cos\phi$

$\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_z = 0$

2.圓柱坐標↔直角坐標

(1) $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x = \cos\phi$

$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_y = \sin\phi$

$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z = 0$

(2) $\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_x = -\sin\phi$

$\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_y = \cos\phi$

$\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_z = 0$

(3) $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = 0$

$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y = 0$

$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1$

3.球體坐標↔圓柱坐標：

(1) $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r = \sin\theta$

$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$

$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z = \cos\theta$

(2) $\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_r = \cos\theta$

$\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$

$\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_z = -\sin\theta$

(3) $\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_r = 0$

$\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi = 1$

$\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_z = 0$

五正交曲面坐標系統

㈠設 u_1，u_2，u_3 爲一新三度空間坐標，$u_1 = c_1$，$u_2 = c_2$ 及 $u_3 = c_3$ 均被稱爲坐標面，任兩坐標面相交成爲一坐標線，三坐標面相交於一點，設各坐標面均係垂直相交，則此項新坐標系統被稱爲正交曲面坐標系統。如圖

$OA = dl_1 = h_1 du_1$

$OB = dl_2 = h_2 du_2$

$OC = dl_3 = h_3 du_3$

精 選 試 題

一、已知有三向量$\overrightarrow{A}$，$\overrightarrow{B}$，$\overrightarrow{C}$分別如下：

$\overrightarrow{A}=\hat{a}_x+2\hat{a}_y+3\hat{a}_z$

$\overrightarrow{B}=-4\hat{a}_y+\hat{a}_z$

$\overrightarrow{C}=\hat{a}_x+\hat{a}_z$

求(一)$\hat{a}_A$，(二)$|\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}|$，(三)$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}$，(四)$\theta_{\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}}$，(五)$\overrightarrow{A}$在$\overrightarrow{C}$上之分量，(六)$\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{C}$，(七)$\overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C})$，(八)$\overrightarrow{A}\times(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C})$。

【解】(一)$\hat{a}_A=\dfrac{\overrightarrow{A}}{|\overrightarrow{A}|}=\dfrac{\hat{a}_x+2\hat{a}_y+3\hat{a}_z}{\sqrt{1+2^2+3^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(\hat{a}_x+2\hat{a}_y+3\hat{a}_z)$

(二)$\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}=(1-0)\hat{a}_x+(2-(-4))\hat{a}_y+(3-1)\hat{a}_z$

$=\hat{a}_x+6\hat{a}_y+2\hat{a}_z$

則$|\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}|=\sqrt{1^2+6^2+2^2}=\sqrt{41}$

(三)$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=(1，2，3)\cdot(0，-4，1)=(0+2\times(-4)+3\times1)$

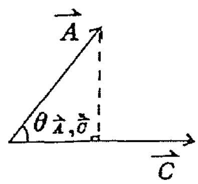
$=-5$

(四)$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=|\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}|\cos\theta_{\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}}$

則$\theta_{\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}}=\cos^{-1}\dfrac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}|}=\cos^{-1}\dfrac{-5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{17}}$

(五)$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}=|\overrightarrow{A}||\overrightarrow{C}|\cos\theta_{\overrightarrow{A},\overrightarrow{C}}$

則$\cos\theta_{\overrightarrow{A},\overrightarrow{C}}=\dfrac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}}{|\overrightarrow{A}||\overrightarrow{C}|}$



$|A|\cos\theta_{\overrightarrow{A},\overrightarrow{C}}=\dfrac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}}{|\overrightarrow{C}|}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

(六)$\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{C}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\hat{a}_x+2\hat{a}_y+2\hat{a}_z$

(七)$\overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C})=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -4 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-4+2-(-12)=10$

(八)$\overrightarrow{A}\times(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C})=(\hat{a}_x+2\hat{a}_y+3\hat{a}_z)\times(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C})$

$=(1\hat{a}_x+2\hat{a}_y+3\hat{a}_z)\times(-4\hat{a}_x+\hat{a}_y+4\hat{a}_z)$

$=5\hat{a}_x-16\hat{a}_y+9\hat{a}_z$

二今有一場其變化定義如下：

$V_x = \sin y$，$V_y = 0$，$V_z = 0$

試求此場的散度

【解】$\nabla \cdot V = \left(\frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z\right) + \left(V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z\right)$

$$= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

因爲 sin y 在 x 方向沒有變化

三試證 $\nabla uv = u\nabla v + v\nabla u$

【解】$\nabla(uv) = a_x \frac{\partial}{\partial x}(uv) + a_y \frac{\partial}{\partial y}(uv) + a_z \frac{\partial}{\partial z}(uv)$

$$= a_x u \frac{\partial v}{\partial x} + a_x v \frac{\partial u}{\partial x} + a_y u \frac{\partial v}{\partial y} + a_y v \frac{\partial u}{\partial y} + a_z u \frac{\partial v}{\partial y} + a_z v \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= u\left(a_x \frac{\partial v}{\partial x} + a_y \frac{\partial v}{\partial y} + a_z \frac{\partial v}{\partial z}\right) + v\left(a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} + a_z \frac{\partial u}{\partial z}\right.$$

$$= u\nabla v + v\nabla u$$

四試求 $\left(\frac{1}{r}\right)$ 的梯度，而 $r = xa_x + ya_y + za_z$

【解】$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= a_x\left[-\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x\right] + a_y\left[-\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right.$$

$$\left.\cdot\, 2y\right] + a_z\left[-\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z\right]$$

$$= -\left(xa_x + ya_y + za_z\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{r}{r^3}$$

五一向量 $\overrightarrow{A} = -z\hat{a}_y + y\hat{a}_z$ 始於 P_1 點，已知 $P_1(0，-2，3)$，$P_2(\sqrt{3}，60^\circ，1)$，求 $\overrightarrow{A}$ 在 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 上之分量。