應用力學講義

第　一　回

50111B-1

社團法人 考友社 出版發行

第一講　概　論

命 題 重 點

一、力學之基本因次與單位

(一)基本量：長度、時間、質量

(二)力之因次與單位：

1. 牛頓第二運動定律：F＝ma，可知力爲質量與加速度之因次。
2. 重量

$$w=F=G\cdot\frac{Mm}{R^2}$$

其中m爲物體之質量，M爲地球之質量，R爲地球之半徑，G爲一常數。

3. 重力單位

重力單位爲工程常用的另一種單位，由

$$F=ma,\quad m=F/a=F/L\cdot T^2$$

表1-1　力學中主要物理量之因次與單位

物理量	因次	單位	符號
長度	〔L〕	公尺或米	m
時間	〔T〕	秒	s
質量	〔M〕	公斤或仟克	kg
力、重量	〔MLT^{-2}〕	牛頓	N, kg・m/s^2
面積	〔L^2〕	平方公尺	m2
體積	〔L^3〕	立方公尺	m3
速度	〔LT^{-1}〕	公尺／秒	m/s
加速度	〔LT^{-2}〕	公尺／秒^2	m/s^2
力矩	〔ML^2T^{-2}〕	牛頓・公尺	N・m
角速度	〔T^{-1}〕	弧度／秒	rad/s
角加速度	〔T^{-2}〕	弧度／秒^2	rad/s^2
功能	〔ML^2T^{-2}〕	弧度／秒^2	J，N・m
功率	〔ML^2T^{-3}〕	焦耳	W，J/s
動量	〔MLT^{-1}〕	瓦特	kg・m/s
衝量	〔MLT^{-1}〕	牛頓・秒	N・s

表1-2　單位換算

質　　量	力	長　　　　度
1斯拉=32.2磅 1公斤=2.205磅 1磅=0.453公斤 =453公克	1磅=32.2磅達 =16盎司(oz) =4.45牛頓 1牛頓=10^5 達因	1呎=12吋(in) =0.3048公尺 1碼(yd)=3呎 1哩(mile)=5280呎

二純量與向量

㈠只有大小而無方向之量，稱之純量(Scalar)，例如速率、體積、時間、質量等。

㈡若除大小外尚具方向之量，稱之向量(vector)，如力、速度、力矩、動量等，表示一向量。

例如$\overrightarrow{A}=\mathbf{A}$。

㈢向量可區分爲三種：

1. 自由向量(free vector)：凡一向量，其位置可任意移動，而不受任何限制者，稱之爲自由向量。
2. 滑動向量(sliding vector)：凡一向量，可在其本身之方向線上任意移動者，稱之滑動向量。
3. 固定向量(bound vector)：凡一向量，不可任意移動其位置者，稱之固定向量。

精 選 試 題

一、重量爲1公斤之物體，置於重力加速爲9.5m/s2之地方，物體在此地所稱之重量爲何？

【解】：由　F＝mg

得知F與重力加速g成正比，當在g＝9.81時，一公斤之質量，稱得1公斤之重量，因此在g爲9.5m／s^2之地方，其重量爲

$$F=1\times\frac{9.5}{9.81}=0.97\ \ kg_f$$

若要將kg_f轉換成N，先將kg_f換成kg_m，再將kg_m換成N，或者直接由kg_f乘以當地之重力加速度g即可。

二、在運動學裏之等加速度直線運動，在時間t內所移動的位移S可以$s=V_0t+\frac{1}{2}at^2$表之，其中V_0爲初速度，a爲加速度。試驗證此方程式是否成立？

【解】：位移S之因次爲長度〔L〕

初速V_0之因次爲〔LT^{-1}〕

加速度a之因次爲〔LT^{-2}〕

檢驗$S=V_0t+\frac{1}{2}at^2$各項之因次

$$[L]=[LT^{-1}][T]+[LT^{-2}][T^2]$$

$$\rightarrow [L]=[L]+[L]$$

方程式裏各項之因次相同，因此由因次齊次定律，可驗證此方程式可應立。

第二講　向量運算

命 題 重 點

一、向量基本定理

(一)單位向量(Unit vector)：

任一向量其大小為 1，稱之單位向量，對於任一向量 **A**，其單位向量為

$$\mathbf{U}_A=\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}=\frac{\mathbf{A}}{A}\text{，且}\quad \mathbf{U}_A\quad =1\text{，}\mathbf{U}_A\text{表}\mathbf{A}\text{之方向}$$

(二)右手直角座標系：

如圖2-1所示，x，y，z三軸互為垂直，四指內握，由x旋轉到y，姆指的方向，即為z軸之向。

(三)空間直角座標系：

定義一組互為獨立的單位向量 **i**，**j**，**k**，分別表示x軸，y軸，z軸之正方向的單位向量，如圖2-2所示。

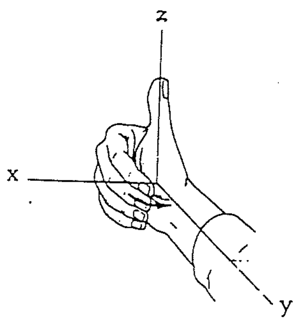


圖2-1　右手直角座標系

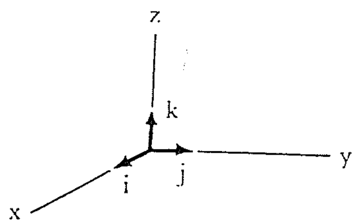


圖2-2　直角座標系之單位向量

(四)空間上任一向量 **A**，可以將它分解成三個在座標軸上分量之和：

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_x+\mathbf{A}_y+\mathbf{A}_z\text{。}$$

以單位向量表之，即

$$\mathbf{A}=A_x\,\mathbf{i}+A_y\,\mathbf{j}+A_z\,\mathbf{k}\text{。}$$

由圖2-2(a)可得

$$|\mathbf{A}|^2=\mathbf{A}_x{}^2+\mathbf{A}_y{}^2+\mathbf{A}_z{}^2$$

或 $$|\mathbf{A}|=A=\sqrt{A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2},$$ $|A|$ 表向量 **A** 之大小。

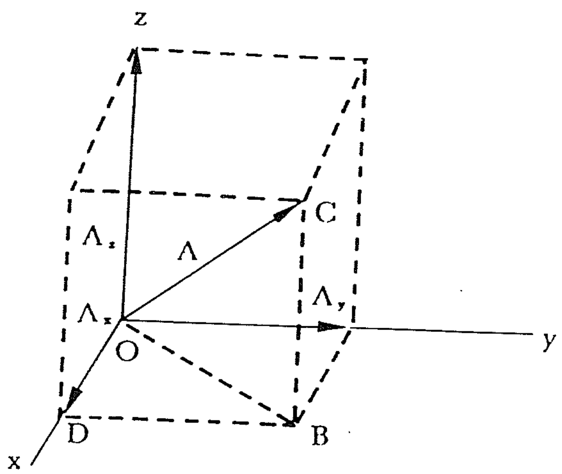


圖2-2(a)

㈤若向量$\mathbf{A}$與x，y，z軸之夾角分別為α，β，γ，
則

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} = 1$$

$$\cos\beta = \frac{A_z}{A} = m$$

$$\cos\gamma = \frac{A_z}{A} = n$$

1，m，n 稱為$\mathbf{A}$之方向餘弦。

㈥若$\mathbf{U}_A$表$\mathbf{A}$之單位向量，則

$$\mathbf{U}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}}{A} = \frac{A_x}{A}\,\mathbf{i} + \frac{A_y}{A}\,\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\,\mathbf{k}$$

$$= 1\,\mathbf{i} + m\,\mathbf{j} + n\,\mathbf{k}$$

而 $|\mathbf{U}_A| = 1 = \sqrt{1^2 + m^2 + n^2}$

所以 $1^2 + m^2 + n^2 = 1$，即

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

㈦位置向量：

空間上任一點相對一已知點的位置關係之向量，稱之位置向量，如圖2-3、圖2-4中位置向量以$\mathbf{r}$表示。

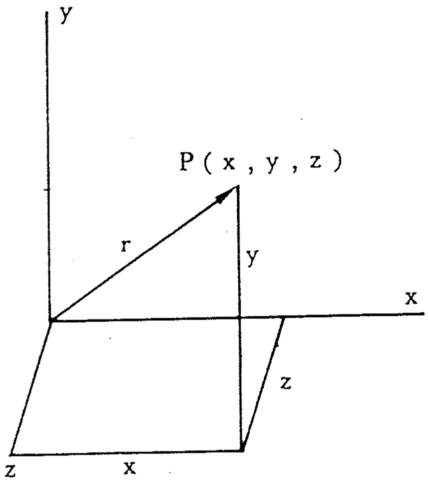


圖2-3

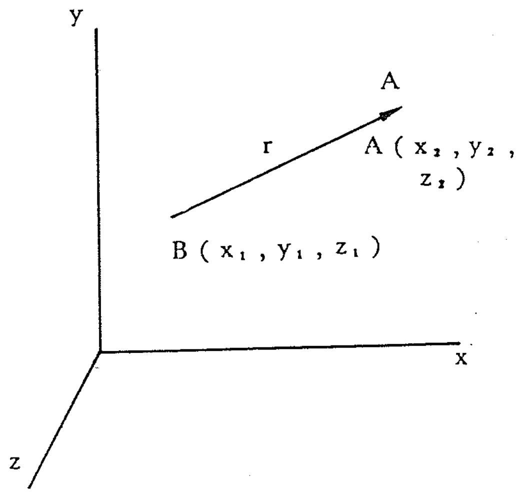


圖2-4

(八)圖2-3表相對於原點之位置向量：

$$r = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(九)圖2-4表A點相對於B點之位置向量

$$\mathbf{r} = (x_2 - x_1)\ \mathbf{i} + (y_2 - y_1)\ \mathbf{j} + (z_2 - z_1)\ \mathbf{k}$$

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^{\ 2}}$$

其單位向量為

$$U_r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{x_2 - x_1}{r}\ \mathbf{i} + \frac{y_2 - y_1}{r}\ \mathbf{j} + \frac{z_2 - z_1}{r}\ \mathbf{k}$$

$$= \cos\alpha\ \mathbf{i} + \cos\beta\ \mathbf{j} + \cos\gamma\ \mathbf{k}$$

式中 $\cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{r}$

$$\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{r}$$

$$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{r}$$

二向量加減法，向量與純量的乘法

㈠向量之加法

1. 利用平行四邊形定律，可得二向量之和。如圖2-5所示對角線得C，即為A，B之和，C＝A＋B。

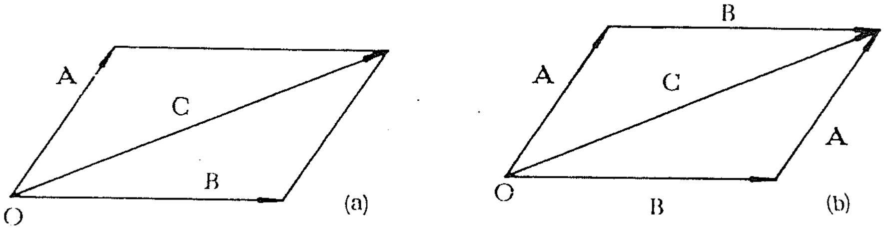


圖2-5

2. 若有二個以上之向量作加法運算，則可利用三角定律，將每個向量的尾端與前一個向量之箭頭接在一起，再將第一個的尾端與最後一個的箭頭連接，即可得此數個向量之和，如圖2-6所示。

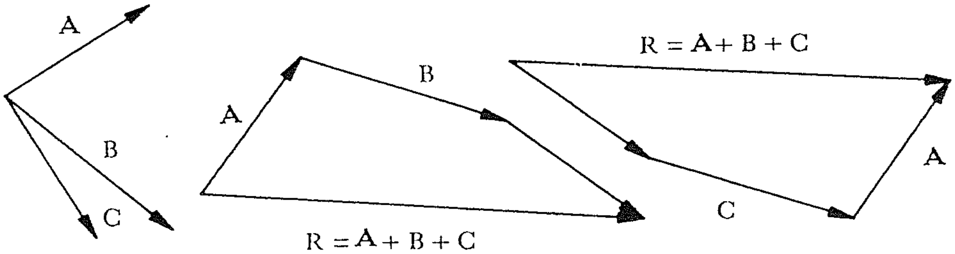
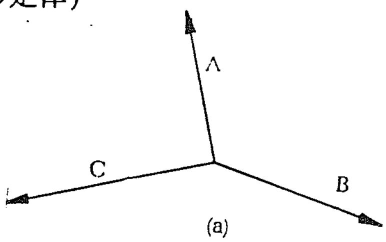


圖2-6　三個向量的相加(三角形定律)

3. 由圖2-5，可得知

$$A + B = B + A$$

因此向量加法適用交換律。



4. 由圖2-6(a)，可得知

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

因此向量之加法適用結合律。

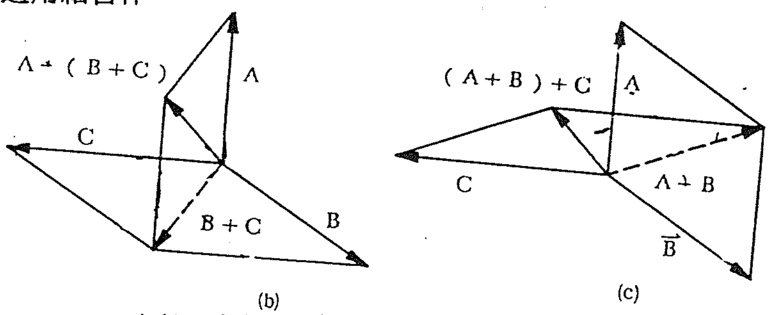


圖2-6(a)　三個向量的相加

5.通常向量可以直角座標系之分量來表示。

如 $\mathbf{A}=A_x\,\mathbf{i}+A_y\,\mathbf{j}+A_x\,\mathbf{k}$

$\mathbf{B}=B_x\,\mathbf{i}+B_y\,\mathbf{j}+B_z\,\mathbf{k}$，兩向量相加，

則 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=(A_x+B_x)\,\mathbf{i}+(A_y+B_y)\,\mathbf{j}+(A_z+B_z)\,\mathbf{k}$

㈡向量之減法

向量之減法，可將減號當成負號，即向量方向改為相反，則相減即成為相加。如A－B＝A＋（－B）。

㈢向量與一純量的乘法：

一向量與一純量之相乘，所得仍為一向量，而且方向沒有改變，只有大小改變。

三向量之純量積

㈠二向量**A**、**B**之純量積，以A・B表示，其中〞・〞唸成〞Dot〞，故亦有人稱純量積或點積。其大小為AB與**A**、**B**之夾角餘弦之乘積，即

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\theta=AB\cos\theta=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

㈡純量積具有下列特性：

1. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ （交換律）
2. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ （分配律）
3. $m(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(m\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}(m\mathbf{B})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})m$ （結合律）

㈢直角座標系中向量之純量積：

直角座標系之基本單位向量，**i**，**j**，**k**其相互間之純量積可由定義獲得：

$$\vec{\mathbf{i}}\cdot\vec{\mathbf{i}}=1\times1\cos0=1$$

$$\vec{\mathbf{i}}\cdot\vec{\mathbf{j}}=1\times1\cos\frac{\pi}{2}=0$$

$$\vec{\mathbf{i}}\cdot\vec{\mathbf{k}}=1\times1\cos\frac{\pi}{2}=0$$

因此 $\begin{cases}\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1\\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0\\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=0\end{cases}$

㈣若空間上二向量$\mathbf{A}=A_x\,\mathbf{i}+A_y\,\mathbf{j}+A_z\,\mathbf{k}$，$B=B_x\,\mathbf{i}+B_y\,\mathbf{j}+B_z\,\mathbf{k}$，

則$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$為

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}&=(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})\cdot(B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k})\\&=A_xB_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})+A_xB_y(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})+A_xB_z(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})\\&\quad+A_yB_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})+A_yB_y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})+A_yB_z(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k})\\&\quad+A_zB_x(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i})+A_zB_y(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j})+A_zB_z(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\\&=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\end{aligned}$$

㈤已知二向量之純量積與二向量之大小時，可求得二向量之夾角：

由： $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\theta$

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}$$

所以： $\theta=\cos^{-1}\left(\dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}\right)$

四向量之向量積

㈠二向量的向量積(vector product)為一向量，其方向與原二向量之方向垂直，其指向遵守右手定則。二向量A、B之向量積，記為$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$，”×”唸為”cross”，若$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$之夾角為$\theta$，$0\leq\theta\leq\pi$，則

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=AB\sin\theta\,\mathbf{U}_n$$

式中$\mathbf{U}_n$表$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$之方向，且與$\mathbf{A}$向量，$\mathbf{B}$向量皆互相垂直。

㈡$\mathbf{B}\times\mathbf{A}=-\mathbf{A}\times\mathbf{B}$，表示B×A之方向與A×B相反，大小相同。所以，向量之向量積不具交換律。

㈢向量積具分配律

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$$

㈣向量積具結合律

$$r\mathbf{A}\times s\mathbf{B}=rs(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

㈤若A、B互相平行，則$A\times B=0$

㈥向量積在直角座標系之運算。

直角座標系中，三軸方向的單位向量$\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$三者相互的向量積，如圖2-7所示：

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{i}\times\mathbf{i}=0\\\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\\\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}\end{array}\right.\qquad\begin{array}{l}\mathbf{j}\times\mathbf{j}=-\mathbf{k}\\\mathbf{j}\times\mathbf{j}=0\\\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}\end{array}\qquad\begin{array}{l}\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\\\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}\\\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0\end{array}$$

若兩單位向量依順時針方向相乘，則所得之第三個單位向量爲正，如 $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$；若方向爲逆時針，則第三個單位向量爲負，如 $k \times j = -i$。

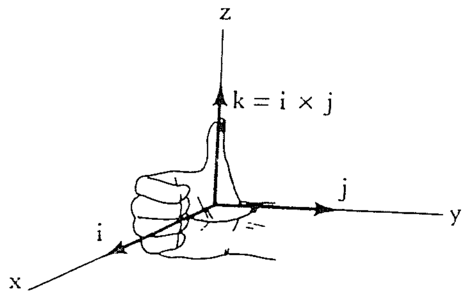


圖2-7　右手定則

(七)若任意二向量A與B，$A = A_x \mathbf{i} + Ay \mathbf{j} + Az \mathbf{k}$，$B = Bz \mathbf{i} + By \mathbf{j} + Bz \mathbf{k}$，則A，B之向量積爲

$$A \times B = (A_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k})$$
$$= (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k}$$

可以行列式表示如下：

$$A \times B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

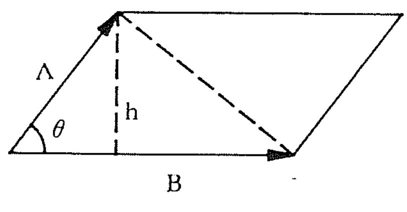


圖2-8

(八)向量積之應用：

二向量之向量積的大小，剛好是由二向量所圍成的平行四邊形之面積。如圖2-8

(九)三向量之乘積

1. $(A \cdot B)C$ 其結果仍爲一向量，方向與C平行，而大小爲 $|A \cdot B||C|$。

2. $A \cdot (B \times C)$ 其結果爲一純量，

$$A \cdot (B \times C) = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_y C_z - B_z C_y)\mathbf{i}$$
$$+ B_z C_z - B_x C_z)\mathbf{j} + (B_x C_y - B_y C_x)\mathbf{k})]$$
$$= A_x B_y C_z + A_y B_z C_x + A_z B_x C_y$$
$$- A_z B_y C_z - A_x B_z C_y - A_y B_x C_z$$