數　學　講　義

第　一　回

106110-1

社團法人 考友社 出版發行

數學講義　第一回

目錄

第一講　邏輯與集合、數與坐標系

命題重點

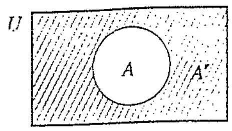
一、邏輯與集合
　㈠集合
　㈡邏輯
　㈢函數
二、數與坐標系
　㈠整數
　㈡有理數與實數
　㈢平面坐標系
　㈣複數與複數平面

重點整理

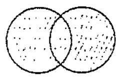
一、邏輯與集合

(一)集合：

1. 集合與元素間的關係：集合是由一些明確而可鑑定的東西所組成的群體，組成這個群體的每個東西叫做這個集合的元素．若 x 為集合 A 中的一個元素，記作 $x \in A$，讀作 x 屬於 A；反之，記作 $x \notin A$，讀作 x 不屬於 A.
2. 集合的元素個數：若 A 為一集合，將 A 中元素個數記作 $n(A)$ 或 $|A|$．若 $n(A) < \infty$，則稱 A 為有限集合；若 $n(A) = \infty$，則稱 A 為無限集合.
3. 集合的表示法：
   (1) 列舉法：例如 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ 表小於等於 10 的正偶數所成集合.
   (2) 描述法（構式記號）：例如 $\{x \mid 0 < x \leq 10$，x 為偶數$\}$ 亦表小於等於 10 的正偶數所成集合.
4. 集合與集合間的關係：
   (1) 空集合：不含任何元素的集合以 $\{\quad\}$ 或 ϕ 表示.
   (2) 部分集合（子集）：$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$，稱 A 為 B 之部分集合，以 $A \subset B$ 表示.
   (3) 規定：ϕ 為任何集合之部分集合.
   (4) 相等的集合：$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$.
   (5) 宇集：在集合論中，一切集合均可認為某一固定集合的子集合，則稱此固定的集合為宇集或稱基集，通常以 U 表示.

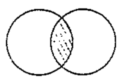


   (6) 補集（餘集）：設集合 A，則不在 A 之元素所成之集合以 $\overline{A}$ 或 A' 表示，即 $A' = \{x \mid x \notin A, x \in U\}$.
   (7) 冪集合：A 集合的冪集合以 2^A 表示，且 $2^A = \{x \mid x \subset A\}$，即 A 集合的部分集合所成的集合.
5. 集合的運算：
   (1) 聯集：$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$，如圖(一).



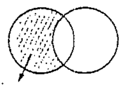
$A \cup B$

圖(一)



$A \cap B$

圖(二)



$A - B$

圖(三)

   (2) 交集：$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$，如圖(二).

(3) 差集：$A-B=\{x \mid x\in A$ 但 $x\notin B\}=A\cap B'=A-(A\cap B)$，如圖(三).

(4) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(5) 笛摩根定律：$(A\cap B)'=A'\cup B'$，$(A\cup B)'=A'\cap B'$.

(二)邏輯：

1.敘述及眞假值：

(1) 敘述：具有真假性質，吾人能判定為真或為假之語句，謂之敘述．常用 P，Q，A，B……等字母表示之.

(2) 真假值：敘述之真或假稱為此敘述之真假值，通常以 T 表真，以 F 表假.

2.否定敘述：一敘述 P 之反面敘述，叫 P 之否定，以「非 P」或「$\sim P$」表示.

3.命題：

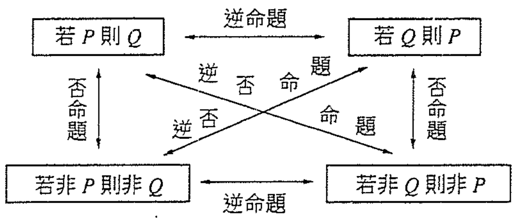
(1) 具有「若 P 則 Q」形式之敘述，又稱之為命題.

(2) 如果以「若 P 則 Q」為原命題，則：

①「若 Q 則 P」稱為逆命題

②「若非 P 則非 Q」稱為否命題

③「若非 Q 則非 P」稱為逆否命題



4.充分條件、必要條件與充要條件：

(1)

命題	條件	
$p\Rightarrow q$（若 p 則 q）	p 為 q 的充分條件	q 為 p 的必要條件
$q\Rightarrow p$（唯若 p 則 q）	p 為 q 的必要條件	q 為 p 的充分條件
$p\Leftrightarrow q$（若且唯若 p 則 q）	p 為 q 的充要條件	q 為 p 的充要條件

(2) 子集合之包含關係可以延用解析充分、必要條件之關係，當 $p\subset q$，則 p　q，即 p 為 q 之充分條件，q 為 p 之必要條件.

5.推理與證明：

(1) 推理：$P\rightarrow Q\equiv\sim Q\rightarrow\sim P\equiv\sim P\vee Q$.

(2) 證明方法：①直接證法．②反證法（欲證明 $p\rightarrow q$ 時，轉而證明 $\sim q\rightarrow\sim p$，就是反證法）.

(3) 鴿籠原理：設有 n 隻鴿子棲息在 m 個鴿籠裡，當 $n>m$ 時，必有一個鴿籠至少棲息 2 隻鴿子.

(三)函數：

1.函數的定義：

(1) 給定兩非空集合 A 與 B，如果 A 中的每一元素 a，在 B 中恰有一個元素 b 與之對應，

則我們稱這種對應法則 f 為“從 A 映到 B 的函數”，記為 $f:A\rightarrow B$，其中 b 叫做 a 的函數值，用符號 $f(a)$ 表示．集合 A 稱為函數 f 的定義域，集合 B 稱為函數 f 的對應域．全體函數值 $f(a)$ 所成的集合稱為 f 的值域，即 $\{f(a)\mid a\in A\}$．

(2) 在 x 與 y 的關係中，當 x 的值給定時，y 的值也隨著確定，此時我們稱 y 為 x 的函數，x 稱為自變數，y 稱為應變數．

2.函數的判定：

(1) 給一個 x 的值，只能產生一個 y 的值，稱 y 是 x 之函數．

(2) 給一個 y 的值，只能產生一個 x 的值，稱 x 是 y 之函數．

3.函數的定義域：使函數有意義時，自變數的範圍．

4.定義域的求法：

(1) 多項式：R．　(2) 分式：分母不為零．　(3) 根式：根號內的數大於或等於零．

5.函數值的求法：比較已知與結論的關係，將數字代入．

6.函數的值域：函數值所成的集合．

7.函數與圖形：平行 y 軸的直線與圖形相交時，其交點只有一個，此圖形為 y 是 x 函數的圖形．

二、數與坐標系

(一)整數：

1.除法原理：若 a，$b\in Z$，$b\neq 0$，則必存在唯一的一組整數 q，r，使得 $a=bq+r$，且 $0\leq r<|b|$（除法原理），此時 q，r 分別稱為以 b 除 a 所得之商與餘數．

2.因數與倍數：a 被 b 除，得商 q，餘數 r，$0\leq r\leq|b|$，若 $r=0$（即 a 被 b 整除），則稱 b 是 a 的因數，而 a 是 b 的倍數，以 $b\mid a$（b 整除 a）表示．

3.因數性質：

a，b，$c\in Z$，

(1) $a\mid b$，$b\mid c\Rightarrow a\mid c$（遞移性）．

(2) $a\mid b$，$a\mid c\Rightarrow a\mid mb+nc$，其中 m，$n\in Z$（線性組合）．

4.質數判別：$a\in N$，$a>1$，若所有小於或等於 $\sqrt{a}$ 的質數都不是 a 的因數，則 a 為質數，否則 a 叫做合成數．

5.算術基本定理：

$n\in N-\{1\}$，n 可以表成質數的乘積：

$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}$……………①，其中 p_1，p_2，……，p_k 是由小而大的相異質數，α_1，α_2，……，α_k 都是正整數，①式稱為 n 的標準分解式．

6.由 n 之標準分解式可得：

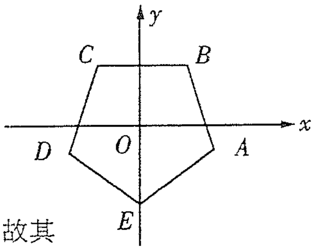
精選試題

一、選擇題（含單選、多選）

1．a，$b \in R$，$\alpha \in C$，則下列何者為$\dfrac{3a-bi}{a\alpha+2bi}$之共軛複數？ (A)$\dfrac{3a+bi}{a\alpha-2bi}$ (B)$\dfrac{3\bar{a}-\bar{b}i}{a\bar{\alpha}-2i\bar{b}}$ (C)$\dfrac{3a+bi}{a\bar{\alpha}-2bi}$ (D)$\dfrac{3a+bi}{a\bar{\alpha}+2bi}$ (E)$\dfrac{3\bar{a}+\bar{b}i}{a\bar{\alpha}+2bi}$。

答：$\overline{\left(\dfrac{3a-bi}{a\alpha+2bi}\right)}=\dfrac{\overline{3a-bi}}{\overline{a\alpha+2bi}}=\dfrac{\overline{3a}-\overline{bi}}{\overline{a\alpha}+\overline{2bi}}=\dfrac{3a+bi}{a\bar{\alpha}-2bi}$，故選(C)

2．設 $ABCDE$ 是坐標平面上一個正五邊形，它的中心與原點重合，且頂點 E 在 y 軸的負向上，試問下列各直線中斜率最小為何者？ (A)直線 AB (B)直線 BC (C)直線 CD (D)直線 DE (E)直線 EA。



答：由圖形可知

(1) 斜率為正的直線為 $\overleftrightarrow{AE}$，$\overleftrightarrow{CD}$，而 $\overleftrightarrow{CD}$ 的坡度較大，故其斜率較大，即 $m_{\overleftrightarrow{CD}}>m_{\overleftrightarrow{AE}}>0$

(2) 斜率為 0 的直線為 $\overleftrightarrow{BC}$

(3) 斜率為負的直線有 $\overleftrightarrow{AB}$，$\overleftrightarrow{DE}$，而 $\overleftrightarrow{AB}$ 的坡度較大，故其斜率較小，即 $0>m_{\overleftrightarrow{DE}}>m_{\overleftrightarrow{AB}}$

故 $m_{\overleftrightarrow{CD}}>m_{\overleftrightarrow{AE}}>m_{\overleftrightarrow{BC}}>m_{\overleftrightarrow{DE}}>m_{\overleftrightarrow{AB}}$

∴此題答案選(A)

3．在複數平面上，$\Gamma=\{Z\in C \mid |Z+i|=|Z-i|\}$，則 Γ 的圖形為 (A)直線 (B)圓 (C)線段 (D)三角形 (E)橢圓。

答：令 $Z=x+yi$（x，$y\in R$）

$|Z+i|=|Z-i| \Rightarrow |x+(y+1)i|=|x+(y-1)i|$

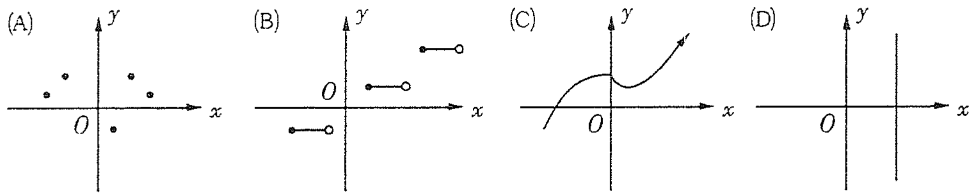
$\Rightarrow x^2+(y+1)^2=x^2+(y-1)^2 \Rightarrow y=0$

故 Γ 的圖形為一直線，選(A)

4．設 $A=\{\phi，1，\{\phi\}\}$，則下列敘述何者正確？ (A)$\phi\in A$ (B)$\phi\subset A$ (C)$\{1\}=A$ (D)$\{\phi\}\in A$ (E)$\{\phi\}\subset A$ (F)A 集合之子集合有 8 個。

答：集合 A 之元素有 ϕ，1，$\{\phi\}$，而其子集合分別爲 ϕ，$\{\phi\}$，$\{1\}$，$\{\{\phi\}\}$，$\{\phi, 1\}$，$\{\phi, \{\phi\}\}$，$\{1, \{\phi\}\}$，$\{\phi, 1, \{\phi\}\}$ 共8個
故此題答案爲(A)，(B)，(D)，(E)，(F)

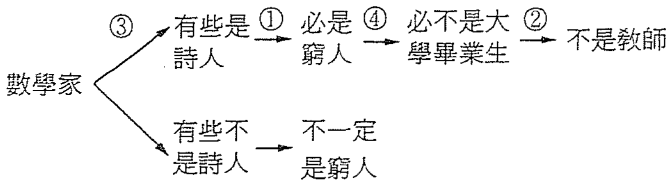
5．下列各圖形中，何者爲 y 是 x 的函數圖形？



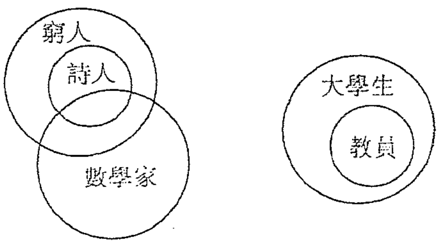
答：作平行 y 軸的直線，與圖形的交點沒有超過一點的是 (A)，(B)，(C)
故(A)，(B)，(C)是函數圖形

6．已知：①所有的詩人皆爲窮人、②每一個教師皆爲大學畢業生、③有些數學家就是詩人、④沒有一個大學畢業生是窮人，皆爲眞。
試問下列敘述哪些爲眞？ (A) 有些數學家不是教師 (B) 教師皆非窮人 (C) 沒有詩人是教師 (D) 有些數學家是窮人 (E) 所有的窮人都不是數學家。

答：方法一：



由上面討論知：窮人 ⇨ 不是教師，成立
而其逆否命題：教師 ⇨ 不是窮人，亦成立
故選(A)(B)(C)(D)
方法二：
以集合觀點而言，畫得文氏圖爲



由上面文氏圖可知答案爲(A)(B)(C)(D)

二、非選擇題（含填充、計算、證明）

1．(1) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 為 $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$ 之______條件。

(2) 有一四邊形 $ABCD$，則“$\overline{AC}=\overline{BD}$”是“$ABCD$ 為矩形”之______條件。

(3) x，$y\in R$，則 $x=1$ 為 $xy=1$ 之______條件。

(4) 設 $k\in R$，若 $|x+2|\le 4$ 為 $|x-1|\le k$ 之必要條件，求 k 之最大值。

答：(1) 若 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

則 $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$ 成立

但 $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$，則 $\triangle ABC$ 不一定全等於 $\triangle DEF$

故此題答案為充分條件

(2) 若 $\overline{AC}=\overline{BD}$，則 $ABCD$ 不一定是矩形

但若 $ABCD$ 為矩形，則 $\overline{AC}=\overline{BD}$ 成立

故此題答案為必要條件

(3) 若 $x=1$，則 $xy=1$ 不成立

而 $xy=1$，則 $x=1$ 亦不成立

故此題答案為非充分非必要條件

(4) $\because |x+2|\le 4 \quad \therefore -6\le x\le 2$

$\because |x-1|\le k \quad \therefore 1-k\le x\le 1+k$

又 $|x+2|\le 4$ 為 $|x-1|\le k$ 之必要條件

$\therefore 1+k\le 2$ 且 $1-k\ge -6$

$\therefore k\le 1$ 且 $k\le 7$，故 $k\le 1 \quad \therefore k$ 最大值為 1

2．(1) $|2x+5|+|2x-1|=6$ 之解集合為______。

(2) $|x+5|+|x-2|=8$ 之解集合為______。

答：(1) 方法一：

$|2x+5|+|2x-1|=|2x+5|+|1-2x|\ge|(2x+5)+(1-2x)|=6$

$\therefore$ 等號成立 $\Leftrightarrow (2x+5)(1-2x)\ge 0$

$\Leftrightarrow (2x+5)(2x-1)\le 0$

$\therefore -\frac{5}{2}\le x\le\frac{1}{2}$

方法二：

$|2x+5|+|2x-1|=6 \Rightarrow \left|x+\frac{5}{2}\right|+\left|x-\frac{1}{2}\right|=3$

在幾何上的含意乃表示在數線上找一點 $P(x)$，使其與 $A(-\frac{5}{2})$，$B(\frac{1}{2})$ 的距離和 $\overline{PA}+\overline{PB}=3$