數位系統講義

第 一 回

607951-1

社團法人 考友社 出版發行

第一講　數位與數碼

命 題 重 點

一、二進數至十進數換算

二進數系統是位置值系統，且各二進數位（位元）皆具有相關於LSB的位置權重值。任何二進數要轉換爲同等十進數是僅需將二進數爲1的各位置權重值相加即可。例如下列所示：

$$\begin{array}{l} 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad (\text{二進數}) \\ 2^4 + 2^3 + 0 + 2^1 + 2^0 = 16 + 8 + 2 + 1 \\ \qquad = 27_{10} \quad (\text{十進數}) \end{array}$$

再試試下面具有更多位元的二進數之例子，則

$$\begin{array}{l} 1\ 0\ 1\ \ 1\ 0\ 1\ 0\ \ 1_2 = \\ 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = 181_{10} \end{array}$$

注意到求出各位元位置是1的權重（即2的乘冪）之程序，同時也要注意到縱然MSB爲第8個位元而其權重卻爲2^7，這是由於LSB是第一個位元且其權重總是爲2^0。

二、十進數至二進數換算

有兩種方法可以將十進數換算爲同等的二進數。一種便於用在小的十進數之方法是在2-1節中所述的相反程序。十進數僅由2的乘冪之和所表示且將1與0寫於正確的位元位置處。例如下列所示：

$$\begin{array}{l} 45_{10} = 32 + 8 + 4 + 1 = 2^5 + 0 + 2^3 + 2^2 + 0 + 2^0 \\ \qquad = 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1_2 \end{array}$$

注意到0被放在2^1與2^4位置處，這是因爲所有的位置需計算到之故。另一例如下：

$$\begin{array}{l} 76_{10} = 64 + 8 + 4 = 2^6 + 0 + 0 + 2^3 + 2^2 + 0 + 0 \\ \qquad = 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0_2 \end{array}$$

連除法

另一種對大的十進數較爲好用的方法爲連續除以 2 。如下所示爲 25_{10} 之換算，需要將此十進數連續除以 2 且在除完之後要寫下餘數，這個連續除 2 的步驟進行至商爲 0 時才結束。注意所求的二進數是把第一個餘數當作 LSB 且最後的餘數爲 MSB 。

如果計算器用來執行除以 2 的除法，則不論商有無帶小數仍可決定出餘數。比方說，計算器可產生 25/2 = 12.5 。這個 .5 便可表示餘數爲 1。計算器也可以產生出 12/2 = 6.0 ，則便表示餘數爲 0 。

$$\frac{25}{2} = 12 + \quad 餘 \quad 1$$

$$\frac{12}{2} = 6 + \quad 餘 \quad 0$$

$$\frac{6}{2} = 3 + \quad 餘 \quad 0$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \quad 餘 \quad 1$$

$$\frac{1}{2} = 0 + \quad 餘 \quad 1$$

MSB　　　　LSB

$$25_{10} = \boxed{1\ 1\ 0\ 0\ 1_2}$$

下列之例乃爲用計算器所產生的情形：

$$\frac{37}{2} = 18.5 \longrightarrow \quad 餘 \quad (\mathrm{LSB})$$

$$\frac{18}{2} = 9.0 \longrightarrow \quad 0$$

$$\frac{9}{2} = 4.5 \longrightarrow \quad 1$$

$$\frac{4}{2} = 2.0 \longrightarrow \qquad 0$$

$$\frac{2}{2} = 1.0 \longrightarrow \qquad 0$$

$$\frac{1}{2} = 0.5 \longrightarrow \qquad 1\ (\text{MSB})$$

故，$37_{10} = 100101_2$。

三、八進數系統

八進數系統在數位計算機工作上是很重要的。八進數系統上基數爲 8，此便表示其具有 8 個可能的數字：0，1，2，3，4，5，6 以及 7。故八進數的各數字可具有 0 至 7 的任何值。在八進數中的各數位位置之權重值如下：

8^4	8^3	8^2	8^1	8^0	8^{-1}	8^{-2}	8^{-3}	8^{-4}	8^{-5}

八進小數點

八進數至十進數換算

將八進數中各八進數字乘上其各自的位置權重值後相加之總和便很容易地換算成對等的十進數。例如：

$$\begin{aligned} 372_8 &= 3 \times (8^2) + 7 \times (8^1) + 2 \times (8^0) \\ &= 3 \times 64 + 7 \times 8 + 2 \times 1 \\ &= 250_{10} \end{aligned}$$

另外一例爲：

$$\begin{aligned} 24.6_8 &= 2 \times (8^1) + 4 \times (8^0) + 6 \times (8^{-1}) \\ &= 20.75_{10} \end{aligned}$$

十進數至八進數換算

十進整數可使用類似將十進數至二進數換算時所使用的連除法換算爲八進數，但是需以 8 代替 2 作爲除數。舉例如下：

$\frac{266}{8} = 33 +$ 餘 2

$\frac{33}{8} = 4 +$ 餘 1

$\frac{4}{8} = 0 +$ 餘 4

$$266_{10} = \boxed{412_8}$$

注意到第一個餘數爲八進數的最低有效位數（LSD），且最後的餘數爲最高有效位數（MSD）。

若計算器被用來執行上述的除法運算時，則結果將爲小數而不是餘數。然而，餘數仍可得到，將小數部份乘上 8 即可求得餘數。例如，266/8 爲 33.25，則餘數爲 $.25 \times 8 = 2$。同樣的，33/8 爲 4.125 且餘數爲 $0.125 \times 8 = 1$。

八進數至二進數之換算

八進數系統主要的優點乃是易於在二進數與八進數間進行換算。八進數換算爲二進數是藉著將各八進數位由其等效之 3 位元二進數代替即可得到。被轉換爲 3 位元二進數的八個數如表 1-1 所示。

表 1－1

八進數字	0	1	2	3	4	5	6	7
二進同等數	000	001	010	011	100	101	110	111

使用這些來換算，則任何八進數換算爲二進數是個別地將其各數位轉換。比方說將 472_8 換算爲二進數，則如下所示爲：

$$\begin{array}{ccc} 4 & 7 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 100 & 111 & 010 \end{array}$$

所以八進數 427 便等於二進數 100111010。另一例爲將 5431_8 換算爲二進數，

則如下所示為：

$$\begin{array}{cccc} 5 & 4 & 3 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 101 & 100 & 011 & 001 \end{array}$$

故 $5431_8 = 101100011001_2$ 。

二進數至八進數換算

由二進數換算為八進數僅是前述換算程序之相反方式。二進數的位元由 LSB 開始算起且每三位元一組，則各組便可轉換為其同等八進數（表 2-1）。比方說可將 100111010_2 換算為八進數，則如下所示為：

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{1\ 0\ 0} & \underbrace{1\ 1\ 1} & \underbrace{0\ 1\ 0} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 7 & 2_8 \end{array}$$

有時二進數並非夠組成三位元組。在這種情形下，則需要加上一個或兩個 0 於此二進數 MSB 的左邊來補足最後的三位元組。以二進數 11010110 為例說明如下：

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{0\ 1\ 1} & \underbrace{0\ 1\ 0} & \underbrace{1\ 1\ 0} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 6_8 \end{array}$$

注意到 0 放於 MSB 的左邊而組成最後的三位元一組。

八進制之計數

八進數最大者為 7 ，故當以八進制計算時，數字是由 0 數至 7 。當數到 7 時，再數一次時，便變為 0 且次高位數加 1 。可由下列來說明，八進制計數順序：(a) 65，66，67，70，71；(b) 275，276，277，300。

有 N 個八進制數字時，則可由 0 數至 $8^N - 1$，意即總共有 8^N 個不同的八進數。例如，三個八進數字便可由 000_8 數至 777_8，總共有 $8^3 = 512_{10}$ 個不同的八進數。

八進數系統之功用

八進數與二進數之間易於換算的優點使八進數系統乃成為可表達大的二進數之一種“速記”方法。在計算機的操作中，二進數達到 64 位元已少見到。這些二進

數並不老是表示某種數量，而是表示某種非數字資訊的數碼型式。在計算機中，二進數可表示(1)實際數據資料；(2)在記憶器中某位置（位址）之數；(3)指令碼；(4)文數字與其它非數字性字元的數碼；(5)一組代表在計算機內部或外部裝置之狀態位元。

處理具有甚多位元的大量二進數時，則將其寫爲八進數是要比以二進數表示方便且有效。但要牢記住數位電路與系統全是以二進數來操作，我們使用八進數僅是爲了要使系統作業人員便利罷了。

例題 1－1

將 177_{10} 換算爲八進數、然後再將所得八進數換算爲同等二進數。

解答：

$$\frac{177}{8} = 22 + \quad \text{餘} \quad 1$$

$$\frac{22}{8} = 2 + \quad \text{餘} \quad 6$$

$$\frac{2}{8} = 0 + \quad \text{餘} \quad 2$$

於是 $177_{10} = 261_8$。接著，由於所得八進數之同等二進數爲 010110001_2，因此

$$177_{10} = 10110001_2$$

注意，同等二進數左邊的 0 可略去不寫，於是所得二進數爲 8 位元。

四、十六進數系統

十六進數系統之基數爲 16。因此便有 16 個可能的數字符號，即使用數字 0 至 9，再加上字母 A，B，C，D，E 以及 F 等 16 個數字符號。表 1-2 所示爲十六進數，十進數以及二進數間的關係。注意每個十六進數位代表一組四個二進數。記住十六進（hexadecimal，簡寫爲 hex）數 A 至 F 是等於十進數 10 至 15。

十六進數至十進數換算

藉著各十六進數之位置具有 16 乘冪的權重之事實，我們便可將十六進數換算爲同等的十進數。LSD 的權重爲 $16^0 = 1$，次一高位數之權重爲 $16^1 = 16$，再次

表 1－2

十六進數	十進數	二進數
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

一高位的數位之權重爲 $16^2 = 256$，依此類推。換算程序如下所示：

$$\begin{aligned} 356_{16} &= 3 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 6 \times 16^0 \\ &= 768 + 80 + 6 \\ &= 854_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2AF_{16} &= 2 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 15 \times 16^0 \\ &= 512 + 160 + 15 \\ &= 687_{10} \end{aligned}$$

注意到於第二個例子中，是以 10 來代替 A，且以 15 來代替 F，如此便可換算爲十進數。

十進數至十六進數換算

還記得我們使用連除 2 的方法來作十進數至二進數的換算與使用連除 8 的方法來作十進數至八進數的換算。同樣的，十進數至十六進數的換算也可使用連除 16 的方法。下面將舉例說明之，同樣地，要注意到除法運算中產生的餘數是如何組成十六進數，同時也要注意到餘數若大於 9 時是以字母 A－F 來表示。

例題 1－2

換算 423_{10} 爲十六進數

解答：

$$\frac{423}{16} = 26 + \quad 餘 \quad 7$$

$$\frac{26}{16} = 1 + \quad 餘 \quad 10$$

$$\frac{1}{16} = 0 + \quad 餘 \quad 1$$

$$423_{10} = \boxed{1A7_{16}}$$

例題 1 - 3

換算 214_{10} 爲十六進數

解答：

$$\frac{214}{16} = 13 + \quad 餘 \quad 6$$

$$\frac{13}{16} = 0 + \quad 餘 \quad 13$$

$$214_{10} = \boxed{D6_{16}}$$

若是計算器用來執行換算過程中的除法運算時，則結果將使商有小數而無餘數。但餘數仍然可以由小數部份乘上 16 而求得。比方說例題 1-3 若用計算器便可以得到

$$\frac{214}{16} = 13.375$$

餘數則變爲 $(.375) \times 16 = 6$ 。

十六進數至二進數換算

就像八進數系統一樣，十六進數系統也可以用來作爲一種表示二進數的“速

記”方法。將十六進數換算爲二進數是極爲簡單的事。每個十六進數可換算爲其對等的4位元二進數（見表2-2）。如下面所示$9F2_{16}$之例。

$$9F2_{16} = \underset{\underset{1001}{\downarrow}}{9}\quad \underset{\underset{1111}{\downarrow}}{F}\quad \underset{\underset{0010}{\downarrow}}{2}$$

$$= 100111110010_2$$

二進數至十六進數換算

這種換算與上述換算程序相反。二進數可區分爲四位元一組，並且各組可換算爲其等效的十六進數。

$$101110100110_2 = \underbrace{1011}_{B}\ \underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{0110}_{6}$$

$$= BA6_{16}$$

爲了要在十六進數與二進數間執行換算,則需要曉得4位元二進數(0000－1111)與其對等的十六進數。當對這些都十分了解後，便可在不需要任何計算情況下快速地執行換算。這便是爲何十六進數（與八進數）用來表示大的二進數是非常有用的理由。

十六進制之計數

當用十六進制計數時，由0至F的每個數位置都逐次加1。當一數字位置達到F時，則變爲0且次一高位數加1。如下所示的十六進計數順序爲：

(a) 38, 39, 3A, 3B, 3C, 3D, 3E, 3F, 40, 41, 42
(b) 6F8, 6F9, 6FA, 6FB, 6FC, 6FD, 6FE, 6FF, 700

注意當達到9時，再加1便爲A。

例題 1－4

利用先換算爲十六進數，將378換算爲16位元二進數。

解答：

$$\frac{378}{16} = 23 + \quad 餘 \quad 10$$

$$\frac{23}{16} = 1 + \quad 餘 \quad 7$$

$$\frac{1}{16} = 0 + \quad 餘 \quad 1$$

於是 $378_{10} = 17A_{16}$ 。接著，十六進數 $17A_{16}$ 可輕易地換算爲二進數 000101111010 。最後，爲了添足 16 位元前面多加了 4 個 0 ，因此 378_{10} 之同等 16 位元二進數爲

$$378_{10} = 0000\ 0001\ 0111\ 1010_2$$

例題 1－5

將 $B2F_{16}$ 換算爲八進數。

解答：

我們可輕易地將十六進數換算爲二進數，然後再將所得二進數換算爲八進數。因此

$$\begin{aligned} B2F_{16} &= 1011\ 0010\ 1111 \\ &= 101\ 100\ 101\ 111 \\ &= 5\quad 4\quad 5\quad 7_8 \end{aligned}$$

五、BCD 碼

二進碼的十進數碼

如果十進數的各數字爲其同等的二進數所表示，所產生的碼便稱爲二進碼的十進數碼（binary-coded-decimal code, BCD code）。因十進數最大爲 9 ，故需 4 位元將各數字編碼（ 9 的二進碼爲 1001 ）。

以十進數 874 爲例來說明BCD 碼。各數位可變爲其等效的二進數如下：

8	7	4	（十進數）
↓	↓	↓	
1000	0111	0100	（BCD）