# 統　計　講　義

## 第　一　回

302213-1

社團法人 考友社 出版發行

# 統計講義　第一回

## 目錄

# 第一講 機率

## 命題重點

### 一、樣本空間

#### (一)樣本空間

在學習統計學時我們基本上所考慮的便是在某一既定的研究或科學觀察中對於機會結果（chance outcomes）的表達和闡釋。例如，我們可以記錄每月發生於Driftwood巷道和Royal Oak車道交叉處的車禍次數，以瞭解是否應裝設交通號誌；我們可以將裝配線上卸下的貨物區分為“不良品”或“良品”；或者我們有興趣研究當酸的濃度改變時在一化學反應中逸出氣體的體積。因此，統計學家常處理數值資料（numerical data）以表示次數（counts）或測定值（measurements），或致力於可依據某些判斷標準（criterion）而加以分類的類別資料（categorical data）。

我們將任何一種資料的記錄，不論其為數值的或類別的均稱之為觀測（observation）。因此數字2,0,1,2，代表去年元月至四月間在Driftwood巷道和Royal Oak車道交叉處每月所發生的車禍次數，構成了一組觀測。同樣地，類別資料N,D,N,N,D，代表5個貨物的檢視結果（N表良品，D表不良品）也構成了一組觀測記錄。

統計學家用實驗（experiment）這個字眼來描述產生一組資料的程序（process）。投擲一枚銅板便是統計實驗的一個非常簡單的例子，在此實驗裏只有兩種可能的結果，正面（heads）或反面（tails）。另一個實驗可能是發射一枚飛彈和在特定時刻觀測其速度。選民對於新增銷售稅的意見也可考慮為一個實驗的觀測。我們特別有興趣於經由反覆許多次實驗所得的觀測。在大多數的情況下結果（outcomes）與機會相關，因而無法肯定推斷。如果一位化學家在同一狀況下進行一分析數次，得到不同的測定值，這可視為實驗的程序中有一種機會的成分。即使反覆投擲一硬幣，我們無法確知某次投擲是否為正面。然而，我們確知每一次投擲的整體集合的機率。

定義1：一項統計的實驗的所有可能結果所成的集合稱為樣本空間（sample space），用符號S代表。

#### (二)元素

在一個樣本空間中每一結果稱為此樣本空間的一元素（element）或一分子（member），亦可簡稱為樣本點（sample point）。

【例一】：

投擲一硬幣可能出現的結果所組成的樣本空間S為

$$S=\{H,T\},$$

此處H和T分別代表“正面”和“反面”。

(三)多樣本點的表示

有相當多或無限多樣本點的樣本空間最好以一項陳述（statement）或規則（rule）來說明。例如，若某項實驗的結果是世界上人口超過一百萬的都市所成的集合，我們的樣本空間可寫成

$S=\{X \mid X\text{是一個人口超過1百萬的城市}\}$

可以讀成“S是所有使得人口超過一百萬的城市所成的集合”。

## 二、事件

(一)事件

定義2：事件（event）爲樣本空間之一子集合。

【例二】：

給定樣本空間$S=\{t \mid t\geq 0\}$，此處t指某一電子元件的壽命（以年計），那麼此元件在第五年尾之前失效的事件A爲S之一子集合。$A=\{t \mid 0\leq t<5\}$。

(二)餘集合

定義3：樣本空間S中事件A的餘集合（complement）是由S中所有不在A中的元素所成之集合。我們以符號A'表事件A之餘集合。

【例三】：

設R爲由52張牌中選中一紅牌之事件，且令S表整副紙牌。那麼R'表選中之牌爲黑牌而不爲紅牌之事件。

(三)交集

定義4：事件A和事件B的交集（intersection）以符號$A\cap B$表示，代表一包含事件A和事件B的共同元素的事件。

【例四】：

令P爲一事件，表示在一大眾化自助餐廳用餐人中任選一人爲納稅人（taxpayer），並令Q表一事件，表該名顧客超過65歲。那麼事件P和Q之交集便是在該自助餐廳中年逾65歲的納稅人。

(四)互斥

定義5：若$A\cap B=\phi$，則稱事件A和事件B爲互斥（mutually exclusive），亦即，若事件A和事件B沒有共同的元素則稱此二事件互斥。

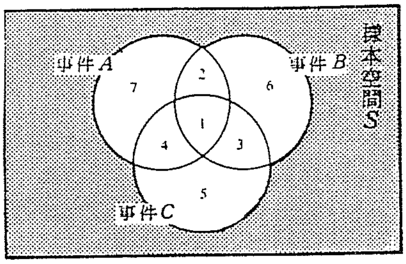
【例五】：

一個有線電視公司在8個不同頻道上提供節目，其中三個屬於ABC聯盟，二個屬於NBC聯盟，另一個屬於CBS聯盟。其他二個分別是教育頻道和ESPN運動頻道。假設接受此收視服務的某人未經選擇頻道便打開電視機，令A表此時播出之節目屬於NBC電視通訊網，事件B則表該節目屬於CBS電視通訊網。因爲同一節目不可能屬於一個以上的通訊網，事件A和事件B不可能有共同的節目。因此，事件A和事件B的交集$A\cap B$不包含任何節目，因此事件A和事件B爲互斥。

定義6：事件A和事件B的聯集（union），可以符號A∪B表示，是指包含了A或B或二者的所有元素之事件。

【例六】：

令A＝{a,b,c} 且B＝{b,c,d,e}；則A∪B＝{a,b,c,d,e}。
諸事件和相應的樣本空間之間的關係可藉凡氏圖（Venn diagrams）加以圖示。在凡氏圖中我們以一矩形表樣本空間，並以位於矩形內之諸圓代表諸事件，如圖一，吾人可得




圖一 以不同區域代表諸事件

A∩B＝區域1和2，
B∩C＝區域1和3，
A∪C＝區域1，2，3，4，5，和7，
B'∩A＝區域4和7，
A∩B∩C＝區域1，
（A∪B）∩C'＝區域2，6，7，

等等。

## 三計算樣本點

### (一)乘法原理

定理1：若某項運算有$n_1$種方式可行，且若其中每一種方式亦各有$n_2$種方式可行，則此二運算之共同執行可有$n_1n_2$種方式。

【例七】：

擲一對骰子一次，在樣本空間中產生多少樣本點？

【解】：

第一枚骰子有$n_1=6$種方式著地，對於此6種方式之每一種方式，第二枚骰子亦可有$n_2=6$種方式著地。因此，一對骰子著地的方式可有$n_1n_2=(6)(6)=36$種可能的方式。

【例八】：

假設午餐包含湯、三明治，正餐後甜點及飲料各一種，現有4種湯、3種三明治、5種正餐後的甜點、和4種飲料可供選擇，則安排午餐的方法有幾種？

【解】：

因為$n_1=4$，$n_2=3$，$n_3=5$，且$n_4=4$，因此共有$n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 4 \times 3 \times 5$

×4＝240種不同的方式可供選擇。

(二)排列

定義7： 排列係指對一組物體之全部或部分的一項安排。

【例九】：

考慮a,b,c三個字母。可能的排列有abc,acb,bac,bca,cab和cba。如此我們可見六種不同的安排。

1.定理2：n種不同物體的排列數爲n！。

2.定理3：n種不同物體，一次取r個加以安排之排列數爲

$$_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$$

【例十】：

由20張樂得彩票中抽取2張爲首獎和二獎。試找出樣本空間S的樣本點個數。

【解】：

樣本點總數爲

$$_{20}P_2=\frac{20!}{18!}=(20)(19)=380$$

3.定理4：幾種不同物體沿一圓做安排，共有（n－1）！種排列方法。

【例十一】：

4人玩橋牌，每人沿順時針排列，在考慮某人於一定位且安排餘三位，則有3！＝6種方式。

4.定理5：總數爲n的物體中，$n_1$屬第一類，$n_2$屬第二類，．．．．，$n_k$屬第K類，不同的排列數共有$\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$種。

【例十二】：

有多少種不同的方式可將3紅燈、4黃燈，和2藍燈安排在有九燈座的一串聖誕樹裝飾燈之上？

【解】：

不同安排的總數爲

$$\frac{9!}{3!\,4!\,2!}=1260$$

5.定理6：分割一個有n個元素的集合爲r個子集合（或格），在第i格中有$n_i$個元素（i＝1,2,...,r），的方法數爲

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}$$

此處$n_1+n_2+\ldots+n_r=n$。

【例十三】：

有多少種方式可將7個科學家分配住宿：三人房一間，雙人房二

間？

【解】：

總分割數有

$$\binom{7}{3,2,2}=\frac{7!}{3!2!2!}=210$$

6.定理7：n個不同物體一次取r個的組合數有

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\text{種。}$$

【例十四】：

由4個化學家，3個物理學家組成含2化學家和1物理學家的委員會方法數有若干？

【解】：

由4個化學家中選2個的方法數為

$$\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}=6\text{種}$$

由3個物理學家中選1個的方法數為

$$\binom{3}{1}=\frac{3!}{1!2!}=3\text{種}$$

由定理1乘法原理：$n_1=6$且$n_2=3$吾人可得

$$n_1n_2=(6)(3)=18\text{種}$$

亦即由2化學家和1物理學家組成委員會可有18種不同的方法。

## 四事件發生的機率

### (一)事件機率

1.為求事件A的機率，我們對A中所有樣本點個別機率求和。這個和值稱為“事件A的機率”（probability of A）且以符號P（A）代表之。

2.定義8：事件A的機率是A中所有樣本點的權數之和，因此

$$0\leq P(A)\leq 1，P(\phi)=0\text{且}P(S)=1。$$

【例十五】：

擲一錢幣兩次，求至少有一正面出現的機率？

【解】：

此實驗之樣本空間為

$$S=\{HH,HT,TH,TT\}.$$

若此錢幣勻稱，4種結果有相同的出現機會。因此，我們對每一樣本點均設定相同的機率$\omega$。那麼$4\omega=1$或$\omega=0.25$。若A代表至少有一正面出現的事件，則

$$A=\{HH,HT,TH\}\text{且}P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

3.定理8：若一實驗可導致N種不同的有相同發生機會的可能結果之一出現，且若

相應於事件A恰有其中的n種，則事件A的機率為

$$P(A)=\frac{n}{N}.$$

【例十六】：

一堆糖果的混合物中有6個薄荷糖，4個太妃糖，和3個巧克力糖。若某人隨意選擇一個，求下列機率：(a)選到薄荷糖，或(b)選到太妃糖或巧克力糖。

【解】：

令M,T和C分別代表此人選到薄荷糖、太妃糖、或巧克力糖的機率。糖果的總數是13，每一個都同樣可能選中。

(a)因為13個中有6個是薄荷糖，事件M一隨意選到薄荷糖的機率為

$$P(M)=\frac{6}{13}$$

(a) 因為13個糖果中有7個是太妃糖或巧克力糖，因此

$$P(T\cup C)=\frac{7}{13}$$

## 五加法法則

### (一)加法法則與聯集

1.定理9：若A和B為任二事件，則

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

【證明】：

考慮凡氏圖，機率P(A∪B)是集合A∪B中所有樣本點個別機率之和。機率P(A)+P(B)是A中所有樣本點之機率和B中所有樣本點之機率的和。因此，我們將集合A∩B中的諸樣本點之機率加了兩次，由於集合A∩B中諸樣本點機率之和構成機率P(A∩B)，我們必須減去此機率一次以得到A∪B中諸樣本點機率之和，此和即為P(A∪B)。

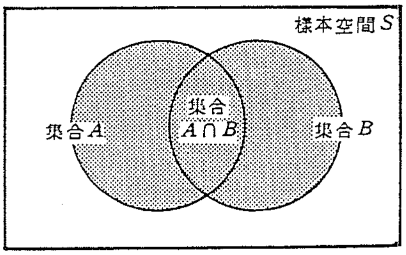



圖1.7　機率的加法法則

(1)推論1：若A和B為互斥，則

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$