機 械 設 計 講 義

第　一　回

50105B-1

社團法人 考友社 出版發行

第一講　基本原理

命　題　重　點

一、拉力、壓力及剪力

㈠拉、壓力之應力與應變：

1. $\boxed{\sigma=\frac{P}{A}}$　式中 σ：拉、壓應力（拉應力爲正，壓應力爲負）
   P：拉壓力（拉力爲正，壓力爲負）
   A：受力桿之橫截面積

2. $\boxed{\varepsilon=\frac{\delta}{\ell}}$　式中 ε：拉壓應變（拉應變爲正，正應變爲負）
   δ：受力桿之變形量（伸長爲正，縮短爲負）
   ℓ：受力桿之長度

3. 對於拉、壓力之虎克定律：$\sigma=E\varepsilon$ 式中 E 爲彈性模數（modulus of elasticity）或稱爲楊氏模數（young's modulus）

⊙ $\boxed{\delta=\frac{P}{A}\frac{\ell}{E}}$　式中 $\frac{\ell}{AE}$：桿件之韌性（flexibility）～由於負載負荷之單位值所致之撓度。

$\frac{AE}{\ell}$：桿件之勁性（stiffness）～產生單位撓度所需之負荷。

⊙ $\mu=\left|\frac{\text{橫向（側向）應變 }\varepsilon_{max}}{\text{軸向應變 }\varepsilon_{max}}\right|=-\frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_{max}}$

⊙單軸應力之應變：

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\sigma_x\ ,\ \varepsilon_y=-\mu\frac{\sigma_x}{E}=-\mu\varepsilon_x\ ,\ \varepsilon_z=-\frac{\mu\sigma_x}{E}=-\mu\varepsilon_x$$

單位體積變化 $\frac{\Delta V}{V}=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\varepsilon_x(1-2\mu)=\frac{\sigma_x}{E}(1-2\mu)$

⊙二軸應力之應變：

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\ ,\ \varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)\ ,\ \varepsilon_z=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)$$

$$\frac{\Delta V}{V} \doteqdot \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{E}(1-2\mu)$$

⊙三軸應力之應變：

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\frac{\Delta V}{V} \doteqdot \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E}(1-2\mu)$$

(二)剪力之應力與應變：

1. $\tau_{av} = \dfrac{P}{A}$　　式中 τ_{av}：平均剪應力

　　P：剪力

　　A：受剪力之截面積

2. 對於剪力之虎克定律：$\tau = G\gamma$

式中 γ：剪應變

G：剪力彈性模數（shear madulus of elasticity）或稱為剛性模數（modulus of rigidity）

⊙ $$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\mu)}}$$

⊙ E，E_v，及 G 三者之關係：

$$\boxed{\frac{9}{E} = \frac{3}{G} + \frac{1}{E_v}}$$

(三)熱應力

1. 線膨脹係數：溫度每昇高一度或降低一度時，材料每單位長度之膨脹或收縮量，以 α 表示。
2. 熱應力：若材料一部份或全部份受阻，而無法產生上述由溫度所生之自由應變時，則材料內部誘生出應力，此應力卽為熱應力。
3. 自由變形量：$\delta = \alpha \ell \Delta t$

自 由 應 變：$\varepsilon = \alpha \cdot \Delta t$

式中：Δt 為正時（卽升高溫度），δ，ε 為正（卽伸長）。

　　Δt 為負時（卽下降溫度），δ，ε 為負（卽收縮）。

熱應力 $\sigma = -\varepsilon \cdot E = -E\alpha\Delta t$

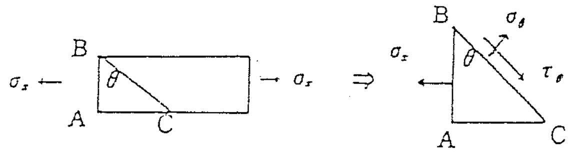
外　力 $P=\sigma\cdot A=-E\cdot\alpha\cdot\Delta t\cdot A$

式中：Δt 為正時（即升高溫度），熱應力為壓應力。

　　　Δt 為負時（即下降溫度），熱應力為拉應力。

二、合成應力

㈠由單軸拉壓力所誘生之各種應力：



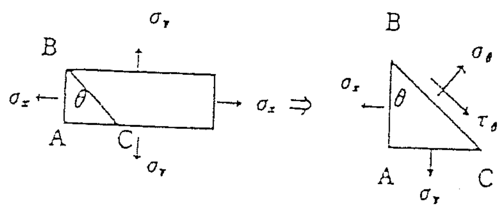
$$\Rightarrow\begin{cases}\sigma_\theta=\sigma_x\cos^2\theta\\ \tau_\theta=\sigma_x\dfrac{\sin2\theta}{2}\end{cases}\qquad\Rightarrow\begin{cases}\sigma_{max}=\sigma_x\ (\ \theta=0^\circ\text{ 時})\\ \tau_{max}=\dfrac{\sigma_x}{2}\ (\ \theta=45^\circ\text{ 時})\end{cases}$$

$$\text{< 此時 }\sigma_{45^\circ}=\frac{\sigma_x}{2}\text{ >}$$

⊙在互成直角各平面（即 $\theta'=\theta+90^\circ$）之應力間有下列之關係：

$$\sigma_\theta+\sigma_{\theta'}=\sigma_x\qquad\tau_\theta=-\tau_{\theta'}$$

㈡由雙軸拉、壓力所誘生之各種應力：（已知 $\sigma_x>\sigma_y$）



$$\Rightarrow\begin{cases}\sigma_\theta=\sigma_x\cos^2\theta+\sigma_y\sin^2\theta\\ \tau_\theta=(\sigma_x-\sigma_y)\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\theta\end{cases}$$

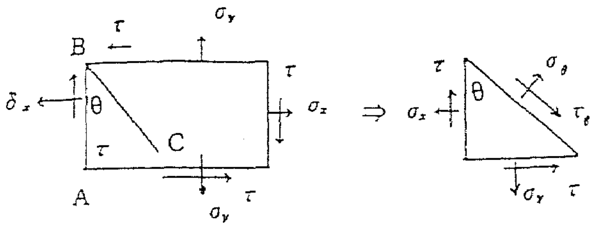
$$\Rightarrow\begin{cases}\sigma_\theta=\dfrac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)+\dfrac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos2\theta\\ \tau_\theta=\dfrac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\sin2\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sigma_{max}=\sigma_x\text{ 或 }\sigma_y\ (\ \theta=0^\circ\text{ 或 }90^\circ\text{ 時})\\ \tau_{max}=\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\ (\ \theta=45^\circ\text{ 時})\quad\text{< 此時 }\sigma_{45^\circ}=\dfrac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)\text{ >}\end{cases}$$

⊙在互成直角各平面（即 $\theta' = \theta + 90^\circ$ ）之應力間有下列之關係：

$$\sigma_\theta + \sigma_{\theta'} = \sigma_x + \sigma_y \qquad \tau_\theta = -\tau_{\theta'}$$

(三)由雙軸拉、壓力及剪力所誘生之各種應力



$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta - 2\tau \sin\theta \cos\theta \\ \quad = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta - \tau \sin 2\theta \\ \tau_\theta = (\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta \cos\theta + \tau(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ \quad = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau \cos 2\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_\theta = \dfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \dfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - \tau \sin 2\theta \\ \tau_\theta = \dfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + \tau \cos 2\theta \end{cases}$$

對 θ 微分得 ⇒

$$\begin{cases} \sigma_{max\,1,2} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \left(2\theta = \tan^{-1}\dfrac{-2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \\ \text{主應力（即剪應力爲零時）} \\ \tau_{max} = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \left(2\theta = \cot^{-1}\left(\dfrac{+2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}\right)\right) \\ \text{最大剪應力（即正交應力爲平均值 } \sigma_{av} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \text{ 時）} \end{cases}$$

⊙平面應力之莫爾氏圓：

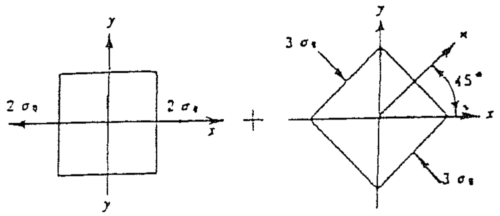
$$\because \quad (\sigma_\theta - \sigma_{av})^2 + \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \tau_{max}^2$$

式中 $\sigma_{av} = \dfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ ， $\tau_{max} = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$

∴ 可以 σ_{av} 爲圓心， τ_{max} 爲半徑作一莫爾氏圓，來求出與水平軸（即 x 軸）成 θ 角度之平面上之各種應力。

精選試題

1　若在一點的應力係由下圖所示的兩種應力狀態的和構成，求主應力的大小和方向。



(b)　　　　　　　　(a)

解：由圖(a)，及單向應力之正交應力與剪應力公式：

當 $\theta=45^\circ$ （如圖(a)示）

$$\sigma_n=\sigma_x\cos^2 45^\circ=2\sigma_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\sigma_0$$

$$\tau=\frac{1}{2}\sigma_x\cdot\sin(2\times 45^\circ)=\frac{1}{2}\cdot 2\sigma_0=\sigma_0$$

當 $\theta=135^\circ$　　$\therefore\ 135^\circ=90^\circ+45^\circ$

$$\sigma_n'=\sigma_x\cdot\sin^2 45^\circ=2\sigma_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\sigma_0$$

$$\therefore\quad \tau'=-\frac{1}{2}\sigma_x\cdot\sin(45^\circ\times 2)=-\frac{1}{2}(2\sigma_0)=-\sigma_0$$

由圖(b)：$\sigma_n=0$　，　$\tau=0$（$\theta=45^\circ$）

$\sigma_n'=-3\sigma_0$　，$\tau'=0$　（$\theta=135^\circ$）

故 $\theta=45^\circ$ 時，圖(a)與圖(b)之組合應力為圖(b)與圖(b)，兩者之合成知　$\sigma_n=\sigma_0+0=\sigma_0$　，$\tau=\sigma_0+0=\sigma_0$　，$\theta=135^\circ$ 時則：

$\sigma_n'=\sigma_0-3\sigma_0=-2\sigma_0$　，$\tau'=-\sigma_0+0=-\sigma_0$

如圖知，

故　$\sigma_x'=\sigma_n=\sigma_0$　，　$\sigma_y'=\sigma_n'=-2\sigma_0$　，$\tau=\sigma_0$

$$\therefore\ \sigma_{\max}=\frac{\sigma_x'+\sigma_y'}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x'-\sigma_y'}{2}\right)^2+\tau^2}$$

$$= \frac{\sigma_0 - 2\sigma_0}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma_0 + 2\sigma_0}{2})^2 + \sigma_0^2}$$

$$= -\frac{\sigma_0}{2} + \sigma_0\sqrt{(\frac{3}{2})^2 + 1} = -0.5\sigma_0 + 1.8\sigma_0 = +1.3\sigma_0$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x' + \sigma_y'}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2})^2 + \tau^2}$$

$$= (\frac{\sigma_0 - 2\sigma_0}{2}) - \sqrt{(\frac{\sigma_0 + 2\sigma_0}{2})^2 + \sigma_0^2}$$

$$= -\frac{\sigma_0}{2} - 1.8\sigma_0 = -2.3\sigma_0$$

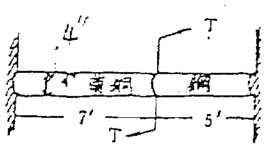
又 $\because \tan 2\theta_P = -\dfrac{2\tau}{\sigma_x' - \sigma_y'} = \dfrac{-2\sigma_0}{\sigma_0 - (-2\sigma_0)} = \dfrac{-2\sigma_0}{3\sigma_0} = -\dfrac{2}{3}$

$\therefore 2\theta_P = -33.7°$ $\therefore \theta_P = -16.85°$ ，故與 x 軸之交角爲

$\theta_{P_1} = 45 - 16.85° = 28.15°$

另一主應力平面角度 $\theta_P' = -16.85° + 90° = 73.15°$ ，故與 x 軸之交角爲 $\theta_{P_2} = 45° + 73.15° = 118.15°$

2. 一直徑 4 英吋之軸係由黃銅及鋼接合而成，如圖，已知黃銅所能承受之最大剪應力爲 6000磅／平方英吋，鋼所能承受之最大剪應力爲 18000磅／平方英吋，軸之最大扭轉角度不得超過 0.06 弳度（ radian ）， 黃銅與鋼之剪彈性係數（Modulus of elasticity in shear ）分別爲 $G_b = 5 \times 10^6$ 磅／平方英吋，及 $G_s = 12 \times 10^6$ 磅／平方英吋。求軸所能承受之最大扭力（ Torque ）T爲若干？



解：$J = \dfrac{\pi d^4}{32} = 8\pi(\text{in}^4)$ $\because$ $\phi = \dfrac{T\ell}{GJ} \Rightarrow T = \dfrac{\phi GJ}{\ell}$

$\because$ $\tau_{\max} = \dfrac{Tr}{J} \Rightarrow T = \dfrac{\tau_{\max} J}{r}$ 故 $\phi = \dfrac{\tau_{\max}\ell}{Gr}$

各材料最大可能之 ϕ：

$$\phi_S = \frac{\tau_S \ell_S}{G_S r} = \frac{18000 \times 60}{12 \times 10^6 \times 2} = 0.045\,\text{rad} < 0.06\,\text{rad}$$