數　學　講　義

第　一　回

151300-1

社團法人 考友社 出版發行

數學講義　第一回　目錄

第一回（1/2）

第一講　數、數列、級數與極限……1
命題重點……1
重點整理……2
一、基礎概念……2
二、數……13
三、數列、級數與極限……17
精選試題……30

第一回（2/2）

第二講　不等式與多項式……1
命題重點……1
重點整理……2
一、不等式……2
二、多項式……12
精選試題……32

第一講　數、數列、級數與極限

命題重點

一、基礎概念
- ㈠數學邏輯
- ㈡條件命題
- ㈢集合
- ㈣函數

二、數
- ㈠自然數
- ㈡有理數與無理數
- ㈢實數
- ㈣絕對值
- ㈤複數

三、數列、極數與極限
- ㈠等差數列與等比數列
- ㈡一般數列
- ㈢無窮數列與級數斂散性之判別
- ㈣公式運算
- ㈤極限值
- ㈥數學歸納法

重點整理

一、基礎概念

(一)數學邏輯：

1.眞假值的判別：

(1)「$A \wedge B$」為真——表示“A 與 B 每一為真”。

(2)「$A \vee B$」為真——表示“A 與 B 有一為真”。

(3)「若 A，則 B」恆真是——當 A 恆偽時，或當 B 恆真時。

範例：設 $x \in R$，敘述“若 $(x+1)(x+2)=0$，則 $x=3$”為真，則下列何者為滿足此命題之集合：(A) R　(B) $\{-1,-2\}$　(C) $\{3\}$　(D) $R-\{3\}$　(E) $R-\{-1,-2\}$。

解析：$(x+1)(x+2)=0$ 為偽，或 $x=3$ 為真之故∴選(C)(E)。

2.同義命題：

(1) $A \rightarrow B \equiv \bar{B} \rightarrow \bar{A} \equiv \bar{A} \vee B \equiv B \vee \bar{A}$ 配合使用下列公式。

①$\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$　②$\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$　③$\overline{A \rightarrow B} \equiv A \wedge \bar{B} \equiv \bar{B} \wedge A$

④$\overline{\forall x, P(x)} \equiv \exists x, \overline{P(x)}$　⑤$\overline{\exists x, P(x)} \equiv \forall x, \overline{P(x)}$

(2)常用符號：

符號	p，q	$\bar{p}(\sim p)$	T	F	$\equiv$	$\wedge$	$\vee$	$\forall$	$\exists$	$\ni$
意義	敘述	否定	真	假	同義	且	或	每一	有一	使得
命題：→表“若…則…”；↔表“若且唯若…則…”；⇒表“蘊涵”										

(3)同義命題：具有相同的眞假值者。

①$p \rightarrow q$ 恆真$\equiv p$ 為假$\equiv q$ 為真

$\equiv$（若設定任意條件下 p 真後，均可推導出 q 亦真）。

②$p \rightarrow q \equiv \bar{q} \rightarrow \bar{p}$（即：$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$）。

③$p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$（即：$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$）。

(4)否定的同義命題：

①$\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$〔即：$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$〕。

② $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$〔即：$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$〕。

③ $\overline{(p \rightarrow q)} \equiv p \wedge q$〔即：$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge (\sim q)$〕。

④ $\overline{\forall x\text{ , }p(x)} \equiv \exists x\text{ , }\overline{p(x)}$〔即：$\sim(\forall x\text{ , }p(x)) \equiv \exists x\text{ , }(\sim p(x))$〕。

⑤ $\overline{\exists x\text{ , }p(x)} \equiv \forall x\text{ , }\overline{p(x)}$〔即：$\sim(\exists x\text{ , }p(x)) \equiv \forall x\text{ , }(\sim p(x))$〕。

範例：⑴設 a , $b \in R$ ，則 $a=b=0$ 為 $a+b=0$ 之 (A)必要條件 (B)充分條件 (C)充要條件。

⑵ $x=3$ 且 $y=5$ 為 $x+y=8$ 的 (A)充分條件 (B)必要條件 (C)充要條件。

解析：⑴ $a=b=0 \Rightarrow a+b=0$ 成立

但 $a+b=0 \Rightarrow a=b=0$ 不一定成立

故選(B)充分條件

⑵ $x=3$, $y=5 \Rightarrow x+y=8$ 成立

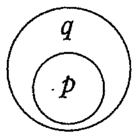
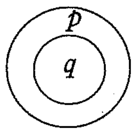
但 $x+y=8 \Rightarrow x=3$ 且 $y=5$ 不一定成立

故選(A)充分條件

(二)條件命題：

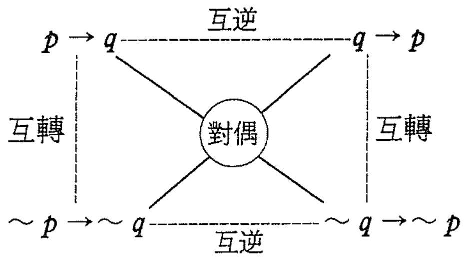
1.利用雙箭頭保證法：必須輔以配方法與代入法解題之

2.利用集合作圖法：必須配合二元不等式之圖形解題之。

條件種類\判別方法	方法一：畫雙箭頭法	方法二：集合作圖法
p 為 q 之充分條件	$p \underset{\text{不一定成立}}{\overset{\text{一定成立}}{\rightleftarrows}} q$	$p \subset q$ 
p 為 q 之必要條件	$p \underset{\text{一定成立}}{\overset{\text{不一定成立}}{\rightleftarrows}} q$	$p \supset q$ 
p 為 q 之充要條件	$p \underset{\text{一定成立}}{\overset{\text{一定成立}}{\rightleftarrows}} q$	$p=q$（圖形相等）

範例：欲證命題「若 A 則 B 」亦即證明下列何命題？ (A)若非 A 則非 B (B)若 B 則非 A (C)若非 B 則 A (D)若非 B 則非 A 。

解析：由對偶命題知 $A \rightarrow B \equiv \sim B \rightarrow \sim A$



故選(D)

(三)集合：

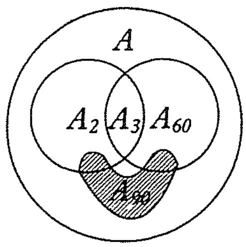
1.集合的解題法：

(1)集合與數系：

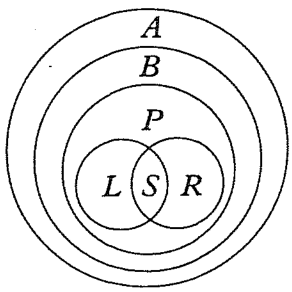
① $N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$；$N\cup Z\cup Q\cup R\cup C=C$；$N\cap Z\cap Q\cap R\cap C=N$
→循環小數為有理數；π，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ 等均為無理數；$\sqrt{-1}=i$ 為複數（但 $\sqrt[3]{-1}=-1$ 為實數）。

② 集合 $A=\{\,ax+by \mid x，y\in Z，a，b$ 為已給整數$\}$，則：
A若 $(a，b)=1$（即 a 與 b 互質），則 $A=Z$（即 A 為全體整數集合）。
B若 $(a，b)=d$（即 a 與 b 之最大公因數為 d），則 $A=\{\,dm \mid m\in Z\,\}$
（即 A 為全體 d 的倍數所成集合）。

(2)集合與幾何：



① 令 A_{90} 為所有直角△之集合
A_2 為所有等腰△之集合
A_3 為所有等邊△之集合
A_{60} 為所有△中至少有一角為 $60°$ 之集合
A 為任意△之集合



② 令 A 表所有四邊形之集合
B 為所有梯形之集合
P 為所有平行四邊形之集合
L 為所有菱形之集合
R 為所有矩形之集合
S 為所有正方形之集合

(3)集合與代數：

①明瞭題意，使用集合符號 。

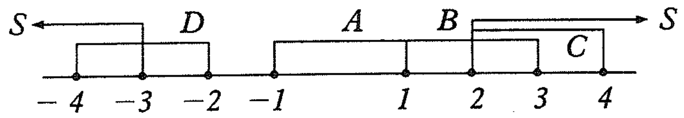
②次作集合圖形思考之。

③後配合代數不等式與方程式理論 。

範例１.：不等式 $(x-2)(x+3)>0$ 的解集合為 S ，而 $A=\{x \mid -1<x<1, x\in R\}$，$B=\{x \mid 1<x<3, x\in R\}$，$C=\{x \mid 2<x<4, x\in R\}$，$D=\{x \mid -4<x<-2, x\in R\}$ ，則下列何者正確？ (A) $A\subset S$　(B) $B\subset S$　(C) $C\subset S$　(D) $D\subset S$ 。

解析： $S=\{x \mid x>2, x<-3, x\in R\}$

由圖解 S，A，B，C，D 知 $C\subset S$



範例２.：(1)設 $A=\{x \mid x^2=1\}$，$B=\{-1, 1\}$ ，則 (A) $A\in B$　(B) $A=B$　(C) $A\supset B$ 。

(2)設 $A=\{x, y, z\}$，$B=\{x+1, 2, 3\}$ ，若 $A=B$ ，則 (x, y, z) 有幾組？

解析：(1) $\because x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$，即 $A=\{1, -1\}$

故 $A=B$

(2) $\because A=B$ 且 $x\neq x+1\Rightarrow x=2$ 或 $x=3$

①當 $x=2$ 時，$A=\{2, y, z\}$，$B=\{2, 3\}$

$\therefore y$，z 中至少有一為 3

即 $(y, z)=(2, 3)$，$(3, 2)$，$(3, 3)$ 三組

②當 $x=3$ 時，$A=\{3, y, z\}$，$B=\{2, 3, 4\}$

$\therefore (y, z)=(2, 4)$ 或 $(4, 2)$ 二組

故 (x, y, z) 共五組解

2.集合的元素個數：

(1)聯集與交集元素個數的最大與最小：

① $n(A\cup B)$ 最大為 $a+b$ ，最小為 a，b 中之較大者：

（即 $\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ ）

精選試題

一、選擇題（含單選、多選）

1. 設 $a = 0.9$，$b = 1.1$，$c = 1.01$，以及

$$x_n = \frac{\alpha a^n}{1 + a^n} + \frac{\beta b^n}{1 + b^n} + \frac{\gamma c^n}{1 + c^n}，n = 1，2，3，\cdots\cdots$$

，式中 α，β，γ 爲任意實數，則極限值 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n =$

(A) 0　(B) $\alpha + \beta + \gamma$　(C) $\alpha + \beta$　(D) $\beta + \gamma$　(E) $\alpha + \gamma$ 。

解析：$a = 0.9 \Rightarrow -1 < a < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0$

$b = 1.1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (\frac{1}{b})^n = 0$

$c = 1.01 \Rightarrow -1 < \frac{1}{c} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (\frac{1}{c})^n = 0$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\alpha \cdot a^n}{1 + a^n} + \frac{\beta}{(\frac{1}{b})^n + 1} + \frac{\gamma}{(\frac{1}{c})^n + 1}\right)$$

$$= \frac{\alpha \cdot 0}{1 + 0} + \frac{\beta}{0 + 1} + \frac{\gamma}{0 + 1} = \beta + \gamma$$　選(D)

2. 若將 $\frac{1}{4369} + \frac{1}{5911}$ 化爲最簡分數，則其分母爲何？

(A) 100487　(B) 100489　(C) 10280　(D) 25825159　(E) 25825161 。

解析：(1)取 4369 與 5911 的最小公倍數：

由 $4369 = 17 \times 257$ ；$5911 = 23 \times 257$

$\Rightarrow [4369, 5911] = 17 \times 23 \times 257 = 100487$

得 $\frac{1}{4369} + \frac{1}{5911} = \frac{23 + 17}{100487} = \frac{40}{100487}$

(2)由 $40 = 2^3 \times 5$，得 $(40, 100487) = 1$

$\Rightarrow \frac{40}{100487}$ 爲所求之最簡分數，其分母爲 100487，選(A)

3. 有一個無窮等比級數，其和爲 $\frac{8}{9}$，第四項爲 $\frac{3}{32}$。已知公比爲一有理數，則當公比以最簡分數表示時，其分母爲　(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 6　(E) 8。

解析：設公比為r，$r\in Q$，且首項為a，則

$$\begin{cases}\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{8}{9}\cdots\cdots①\\ ar^3=\dfrac{3}{32}\cdots\cdots②\end{cases}$$

$\dfrac{②}{①}$，$r^3(1-r)=\dfrac{27}{256}=\dfrac{1}{4}\cdot(\dfrac{3}{4})^3=(\dfrac{3}{4})^3\cdot(1-\dfrac{3}{4})$

$\because r\in Q$，$\therefore r=\dfrac{3}{4}$，選(C)

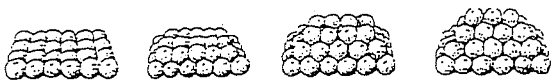
4. 下列何者是2^{100}除以10的餘數？ (A)0 (B)2 (C)4 (D)6 (E)8。

解析＜法一＞：考慮2^n之個位數：2，4，8，6，2，4，8，6，…，每4個一循環，而$100=4\times25$為4的倍數，$\therefore 2^{100}$的個位數為6，得所求餘數為6，選(D)。

＜法二＞：$R_{10}(2^{100})=R_{10}((2^5)^{20})=R_{10}(32^{20})=R_{10}(2^{20})$
$=R_{10}((2^5)^4)=R_{10}(32^4)=R_{10}(2^4)$
$=R_{10}(16)=6$，選(D)

其中$R_b(a)$表a被b除之餘數

5. 下圖表示長方形垛的疊法：



某水果販將橘子堆成長方形垛。
若最底層長邊有10個橘子，短邊有5個，則此長方形垛最多有幾個橘子？
(A) 110 (B) 120 (C) 130 (D) 140 (E) 150。

解析：最底層有 10×5 個橘子
底層的上一層有 9×4 個橘子
再上一層有 8×3 個橘子
接著有 7×2 個橘子
最上層有 6×1 個橘子
∴此長方形垛最多有 $50+36+24+14+6=130$ 個橘子，選(C)

6. 設$(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})\cdots(1-\dfrac{1}{49^2})=\dfrac{a}{b}$，其中a，b為互質的正整數，則 a＋b＝ (A) 70 (B) 71 (C) 72 (D) 73 (E) 74。

解析：原式$=\dfrac{2^2-1}{2^2}\cdot\dfrac{3^2-1}{3^2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{49^2-1}{49^2}$

$=(\dfrac{2-1}{2}\cdot\dfrac{2+1}{2})\cdot\cdot(\dfrac{3-1}{3}\cdot\dfrac{3+1}{3})\cdot\cdots\cdot(\dfrac{49-1}{49}\cdot\dfrac{49+1}{49})$

$=(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2})\cdot(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3})\cdot(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{4})\cdot\cdots\cdot(\dfrac{48}{49}\cdot\dfrac{50}{49})$