綜合科目講義

（數理推輯、捷運常識）

第 一 回

110021-1

社團法人 考友社 出版發行

綜合科目講義　第一回

(數理邏輯、捷運常識)

目錄

第一講　敘述、連詞與真假值

◎命題重點◎

一、敘述

1. 定義：具有完整的意義且能辨別其眞假的句子，就叫做「敍述」（statement）。
〔註：有的書叫做「命題」（proposition）〕

2. 探索：

(1)「地球是方的」跟「3減2等於1」（即“$3-2=1$”）都是敍述，因爲我們能分辨出「地球是方的」爲僞，而「3減2等於1」爲眞。

(2)下面的句子，都不是敍述：
「快走開！」……………………（命令）
「不考試該多好！」……………（祈求）
「阿呆會是建中的料？」………（疑問）
「哇！他好棒啊！」……………（驚嘆）
因爲它們表達的是情緒、願望、疑問與讚嘆，不涉及事實的眞假，因此它們不是敍述。

(3)像“$x^2-1=0$”這樣的式子也是一個句子（x的平方減1等於0），這句子的眞假是由x的値來決定的，若$x=1$或-1；則$x^2-1=0$爲眞；若$x\neq1$且$x\neq-1$，則$x^2-1=0$就不眞，我們把這樣的句子叫做“開放句”其中待定的文字x叫做“變數”。因此所謂「解方程式$x^2-1=0$」，也就是求「能使開放句$x^2-1=0$爲眞」的那些x的値。

(4)集合$A=\{x \mid x\text{爲偶數}\}$，就是由“使開放句「x爲偶數」爲眞”的所有x值所成的集合。

(5)因爲「開放句」非眞即假，所以可以把它看成是眞假待定的「敍述」，它跟眞假已告確定的敍述，都是邏輯研究的基本元素。
【註】：開放句看成邏輯的“變元”，眞假確定的敍述，看成邏輯的“常元”。

(6)有人主張「開放句」不是敍述，我不贊同這樣的觀點。

(7)爲了便於推演，我們把要探討的「敍述」，常以p，q，r等英文字母來表示，同時以大寫英文字母“T”表“眞”，以“F”表“假”。眞與假就是“敍述”的「邏輯値」。

(8)邏輯所考慮的句子，只有兩個可能值〰「眞」，「假」〰。因此邏輯的推演只是「眞」、「假」兩值的推演，所以邏輯是一種「**兩値數學**」。

二、否定

1. 定義： 與敍述 p 意義相反的敍述，叫做 p 的否定，記作“$\sim p$”，讀作“非 p”。

2. 探索：

(1)「我愛數學」是一個敍述，它的否定就是「我不愛數學」。

(2)若 p 表敍述：「李白不是科學家」，則 $\sim p$ 即表「李白是科學家」。不必寫成「李白並非不是科學家」這樣累贅怪異的句子。

(3)“$x+3=0$”的否定，就是“$x+3\neq 0$”；反之“$x+3\neq 0$”的否定就是“$x+3=0$”。

(4)但是要小心，“$x>3$”的否定不是“$x<3$”，而是“$x\leqq 3$”，因為“x 大於3”的否定是“x 不大於3”。而「不大於」含有「小於」或「等於」兩種可能的情形，所以不能只寫「$x<3$」。

(5)一般而言，像“x 具有某某性質”這樣的開放句，它的否定就是“x 不具有某某性質”，我們用 $p(x)$ 表示前者，則 $\sim p(x)$ 即表後者。假定集合 $A=\{x\mid p(x)\}$ 則它的補集 $\overline{A}$（或記作 $\sim A$）就是 $\overline{A}=\{x\mid \sim p(x)\}$，所以集合中的「補集」與「邏輯」中的否定是相應的。

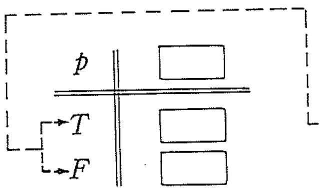
【如】“x 是直角三角形”所決定的集合為 S，則“x 不是直角三角形”所決定的集合就是 $\overline{S}$。

(6)一個敍述 p（的邏輯値）若為眞，則它的否定 $\sim p$ 必為假，如：“杜甫是唐朝的詩人”為眞，它的否定“杜甫不是唐朝的詩人”便是假。倘若“阿美考上了北一女”這句話是假的，那麼“阿美沒考上北一女”就是眞的。由此可知敍述 p 的眞假，決定了它的否定敍述 $\sim p$ 的眞假。

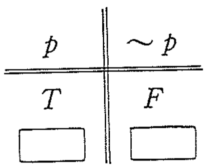
(7)我們把上述的性質列成右邊的表，叫做「否定（敍述）的眞假値表」

p	$\sim p$
T	F
F	T

【註】：眞假値表常簡稱為「眞値表」（truth table）



（豎線左一行的 T 與 F）
表 p 的兩個可能的邏輯値 T（眞）與 F（假）.



（橫線下第一列的 T 與 F）
表 p 為 T（眞）時，$\sim p$ 為 F（假）.

p	$\sim p$
F	T

（橫線下第二列的T與F）

表p為F（假）時，$\sim p$為T（眞）．

(8)假定有兩個敍述p，q；若p眞時q假，而且p假時q眞；我們就說「p，q互相矛盾」，因此p與$\sim p$就是相互矛盾的敍述。

三、複合敍述與連詞

一些複雜的事理與觀念，往往不是一句簡單的敍述所能表達的，因此需要把一些簡單的句子適當地連繫起來，形成複合的敍述，來表達複雜的事理；而連結時所用的文字與符號就叫做「連詞」。邏輯中常用的連詞有：

1. 且：以符號「$\wedge$」來表示「且」（and）．

例如：(1)「杜甫是詩人」，「岳飛是名將」是兩個簡單敍述，用"且"字連接起來，變成「杜甫是詩人，（而）且岳飛是名將」。

(2)「他身體健康」，「他成績優異」用"且"字連結起來，變成一個複句「他身體健康且（他）成績優異」。

(3)設p表「$x>3$」，q表「$x<5$」，則「$p\wedge q$」表「$x>3$且$x<5$」，即「$3<x<5$」。

(4)設p表$x-2y=3$，q表$2x+y=5$，則聯立方程式$\begin{cases} x-2y=3, \\ 2x+y=5. \end{cases}$對應的邏輯形式就是$p\wedge q$。

【註】：以$p(x,y)$表$x-2y=3$，以$q(x,y)$表$2x+y=5$亦可。

(5)合於敍述p的元素所成的集合設為P，合於敍述q的元素所成的集合設為Q，則「合於敍述p且合於敍述q」的元素所成的集合就是$P\cap Q$，故邏輯中的「$\wedge$」與集合中的「$\cap$」是相當的。

(6)在實際使用上，除了連詞的邏輯意義外，尚須顧及語氣及修辭效果，如像「和」、「及」、「與」、「也」、「既……又……」、「不但……而且……」，有時甚至把「且」字有意的省略，以求簡明。

【如】「$x, y\in N$」就是「$x\in N$且$y\in N$」的簡寫。

又如$\{(x,y)\mid y=x^2-2x+3, 1\leqq x\leqq 2\}$，就是$\{(x,y)\mid y=x^2-2x+3$且$1\leqq x\leqq 2\}$的簡寫。

(7)用"且"字連成的複句，叫做「**合取式**」或「**併合式**」。

2. 或：以符號「$\vee$」來表示「或」（or）．

例如：(1)「你來高雄」或「我去台北」。

(2)「我送你一本書」或「我送你一幅畫」。

(3)設敍述「阿美要嫁阿呆」以 p 表示，敍述「阿美終身不結婚」以 q 表示，複合敍述：「阿美要嫁阿呆或阿美終身不結婚」，就可用 $p \vee q$ 來表示。

【註】：通常「p 或 q」中的「或」是兼容性的，允許 p 與 q 同時爲眞，有些時候「或」字不許可 p，q 同時爲眞（如：成仁或降敵）這樣的「或」叫做「排取」的或。有的書裡特別記作「$\underline{\vee}$」。但本書不強調這種用法。

(4)平常我們把「$x = 3$ 或 $x = -3$」寫成 $x = \pm 3$，把「$x < 1$ 或 $x = 1$」寫成 $x \leqq 1$。

(5)由 $x \in A \cup B$ 得「$x \in A$ 或 $x \in B$」，這個「或」字是不能省去的。

(6)設 $A = \{ x \mid x$ 具有 α 性質 $\}$，$B = \{ y \mid y$ 具有 β 性質 $\}$ 則「具有 α 性質或具有 β 性質」的元素所成的集合便是 $A \cup B$，故邏輯中的「或」字與集合中的“$\cup$”是相當的。

(7)用“或”字連成的複句，叫做「**選取式**」。

3. 若……，則……。以符號「→」來表示「 if …… then ……」。

例如：(1)「你沒有成功」是一個敍述，我們用 p 來表示，「你應該成仁」也是一個敍述，我們用 q 表示。把這兩個敍述以「連詞」「若……則」結合起來便是：「若你沒有成功，則你應該成仁。」這個複句就用符號「$p \to q$」來表示，稱爲「**條件敍述**」（**或「假言敍述」**）。

(2)以 p 表「你考試不及格」，以 q 表「你要留級」，則「$p \to q$」表示的就是「若你考試不及格，則你要留級」。不過我們的日常語言並不喜歡嚴格的邏輯字彙與形式，通常都說成：「您考不及格就要留級」。

(3)在數學中的定義與定理，大都採用「若……則」形式的複合敍述來鋪陳。如：

①若三角形有兩邊相等，則此三角形爲等腰三角形。（定義）

②若 $f(a) = 0$，則 a 爲方程式 $f(x) = 0$ 的根。（定義）

③若 $A \subseteq B$，則 $A \cap B = A$。（定理）

④若二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的二根相等，則

$$b^2 - 4ac = 0$$

(4)在過去的教材中，把具有「若……則」形式的敍述叫做「**命題**」（proposition）。

(5)具有「若……則」形式的敍述「$p \to q$」中，p 稱爲「前項」（antecedent），q 稱爲「後項」（consequent）。

※ 這裏我覺得有必要先提一下「條件敍述」與「推演」之間的明確差異。

(1)從前的課本中有這樣的說法，「當任一事物具有性質 α 時，該事物就必然具有性質 β；則 β 就叫做 α 的“推論”，記作「$\alpha \Rightarrow \beta$」，讀作

" α 推演得 β "。(推演 deduction)

(2)我們把上面的說法改爲「敍述」的形式，設 p 表 " x 具有 α 性質，q 表 " x 具有 β 性質"，若 p 爲眞時，則 q 必然也眞。我們就說 q 是 p 的一個「推論」。記作 $p \Rightarrow q$，讀作 " p 推演得 q "。

(3)假定使敍述 p 爲眞的元素所成的集合爲 A，使敍述 q 爲眞的元素所成的集合爲 B，則當 $A \subseteq B$ 時，由 $x \in A$ 必然推得 $x \in B$，故由 p 爲眞必然推得 q 爲眞，$\therefore p \Rightarrow q$。因此邏輯中的推演 "$\Rightarrow$" 與集合關係中的 "$\subseteq$" 是相應的。

(4)在符號邏輯中，「$p \to q$」只表示 p 與 q 兩敍述間的一種結合形式。如：p 表 "$1+1=2$"，q 表 "太陽從東邊出來"。符號邏輯允許我們用任一種連詞(包括：$\wedge$，$\vee$，$\to$)把 p，q 結合起來(變成一個邏輯的式子)：

①$p \wedge q$：$1+1=2$ 且太陽從東邊出來。

②$p \vee q$：$1+1=2$ **或**太陽從東邊出來。

③$p \to q$：**若** $1+1=2$ **則**太陽從東邊出來。

但是誰也不會認定「太陽從東邊出來」是「$1+1=2$」的必然結果，所以「太陽從東邊出來」不是「$1+1=2$」的推論。

【註】p，q 有意義，而連接後的複合句子語意不明時，即失去作爲邏輯考慮之資格。

(5)我們可以這樣說，條件式「$p \to q$」是具有 "若……則" 形式的敍述，邏輯的推理「$p \Rightarrow q$」也是具有 "若……則" 形式的敍述。前者的 p 與 q 未必具有必然的推演關係；而後者，則 q 必需是 p 的必然推論。所以「推演式」具有「條件式」的形式，而條件式卻未必是「推演式」(註：在第3-3頁我們另有解說)。初學邏輯的人，千萬別被下面的一些無聊的「條件式」騙得昏頭轉向。

(A)若 $2+3 \neq 5$，則紐約在美國。

(B)若今天下雨，則李白是明朝人。

(C)……………

4. 若且唯若……，則…… (if and only if …… then ……).

我們把「若 p 則 q」且「若 q 則 p」這樣的複合句子記作「$p \leftrightarrow q$」，讀作 "若且唯若 p 則 q "(從前的課本用此讀法)，也有人讀作 " 若且僅若 p 則 q "。實際上「$p \leftrightarrow q$」就是「$(p \to q) \wedge (q \to p)$」的簡寫。

四、複合敘述的眞假值

※ 邏輯考慮的是「語句的眞假」，一個敍述 p 在邏輯的意義下只有兩個可能 "值"：「

眞」（ T ），或「假」（ F ）。

※ 兩個敍述 p ， q 的眞假情形有下列四種可能的配合：

(1) p 眞， q 眞
p 眞， q 假
p 假， q 眞
p 假， q 假

填成右表 ⟹

p	q	
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

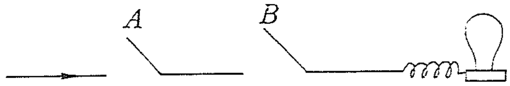
※ 現代邏輯學家，有意地把邏輯當作一種「數學」來推演，敍述 p ， q ， r ……就是它的推演元素（像算術中的數字一樣），連詞 $\wedge$ ， $\vee$ ， $\rightarrow$ ， $\leftrightarrow$ 乃 $\sim$ ，就是它的運算符號（像算術中的＋，－，×，÷一樣），複合敍述 $p \wedge q$ ， $p \vee q$ ， $p \rightarrow q$ ，就是它的基本算式（ formula ），這些式子的「値」（眞或假）是怎樣決定的呢？請看下面的說明：

1. **$p \wedge q$ 的真假值：**

先考慮下面的例子：

(1)某女生選擇男友的起碼條件是「他要學業成績在 80分以上，而且身高不能低於 170 公分」。若阿雄學業成績未滿80 分，即使他身高超過 170 ，也不符合被選上的條件。而阿智雖然學業成績超過了 80 分，但身高卻不足 170 ，該女生也不會選他。阿呆功課差而且是個矮冬瓜，當然想都別想。只有兩個條件同時具備的才夠格。

(2)右圖表示串聯，在一起的 A ， B 兩個電鍵開關，只有 A 與 B 同時「開」，電流才會「通」，而下面三種情形都不「通」。



① A 開， B 關　② A 關， B 開　③ A 關， B 關

(3)因爲你考上了高中，父親答應送你一隻新手錶及一套數學教室，除非他兩樣東西都替你買了，你才會認爲你父親的話兌了現。

※ 由上面這些例子及我們對“ 且 ”字的習慣用法，不難看出，只有 p 與 q 都眞的情形下，我們才會認爲「 $p \wedge q$ 」這句話是眞的，因此邏輯學家以下邊的「眞假表」來決定 $p \vee q$ 的眞假。

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

這一列顯示只有 p 與 q 都眞的情形下 $p \wedge q$ 才爲眞

例如：(1)「李白是詩人」，「樂毅是名將」，這兩句話都是眞的，所以「李白是詩人

且樂毅是名將」這個敍述是眞的。

(2)「$x=2$ 且 $x=3$」這句話爲假！因爲若 $x=2$，則 $x=3$ 必爲假；故 $x=2$ 與 $x=3$ 不可能同時爲眞。

(3)「$3+2>4$ 且 $1+1=3$」爲假，因爲 $1+1=3$ 爲假。

(4)因爲「巴黎是美國的首都」爲假，「紐約是英國的商港」也爲假，故複合敍述「巴黎是美國的首都且紐約是英國的商港」爲假。

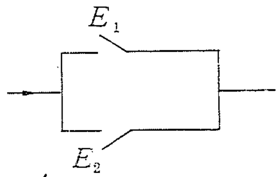
【註】以「且」字連成的複合敍述，叫做「合取式」，當且僅當 p，q 皆眞時，合取式 $p\wedge q$ 始爲眞。

2. $p\vee q$ 的眞假值：

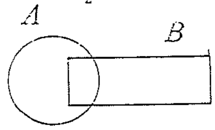
從例子看起：

(1)假定你的朋友告訴你：「我要送你一本書，或者送你一幅畫」。以後不管他送你的是書也好，是畫也好，你都會認爲他是一位講眞話的朋友，除非他兩樣都沒有送，你才會覺得他的話是假的。

(2)右圖中 E_1，E_2 表 " 並聯" 的兩個電鍵開關，不論 E_1 開或 E_2 開（或兩個都開），電流都會通過，除非 E_1，E_2 都關，電流才會不通（這裏可以把「通」視爲「眞」，不通視爲「假」）。



(3)設 A，B 兩個集合，則 $A\cup B$ 中的任一元素或屬於 A，或屬 B，因此我們要判斷「$x\in A\cup B$」是否爲眞，只要看「$x\in A$」或「$x\in B$」二者是否有一爲眞，若「$x\in A$」爲眞或「$x\in B$」爲眞，則 $x\in A\cup B$ 爲眞。除非「$x\in A$」，「$x\in B$」二者都不眞，才能說「$x\in A\cup B$」不眞。



※ 由上面這些相關的例子，不難看出使用 " 或 " 字的規則：當且僅當 p，q 皆爲假，$p\vee q$ 始爲假。其他（三種）情形之下，$p\vee q$ 均爲眞。列成眞假值表如下：

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

只有 p，q 都爲假，$p\vee q$ 才會是假。

【註】一這裏的「或」字具有兼容性（允許 p，q 同時爲眞），有的「或」字含有排斥性（如：你先沐浴或你先用餐」，其中「你先沐浴」與「你先用餐」不可能同時爲眞）但通常均指兼容性的「或」。式子 $p\vee q$ 稱爲選取式（alternation）或「析取式」。

二排斥性的「或」記作$\underline{\vee}$，其眞值表如右：

p	q	$p \underline{\vee} q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

3. $p \to q$ 的真假值：

考慮“若……則”的日常用法：

(1)“若明天吹颱風，則學校就停課”這句話可看出「吹颱風」與否，是「學校停課」與否的決定條件，所以「若……則」形式的敍述叫做「條件式」。

(2)校長下午宣佈“若明天吹颱風，學校就停課”。這句話是眞？是假？必需由事實來驗證，通常大家的觀點是：

①若明天眞的吹起了颱風，而且學校也眞的停了課，當然校長宣佈的那句話就是眞。

②若明天眞的吹了颱風，但學校並沒有眞的停課，大家一定公認校長的那句話是假。

③若明天沒有吹颱風，學校也沒有停課，這是正常的現象，沒有人會說校長宣佈的那句話是假的。

※ 困擾發生在下面的一種情形：

④若明天沒有吹颱風，但學校卻停了課（有人會高興得跳起來），這時校長宣佈的那句話應該算作眞？還是應該算作假？意見可能會不一致。不過目前多數的邏輯學家都把它算作「眞」。說法是：校長宣佈「若明天吹颱風，則學校就停課」，但並沒有宣佈「明天不吹颱風就一定不停課」，因此我們不能說校長原來的宣佈是騙人的。

(3)我們以 p 表「明天吹颱風」，以 q 表「學校明天停課」。則「$p \to q$」表示「若明天吹颱風，則明天停課」，由上面的探討可知：

① p 眞 q 眞時，$p \to q$ 爲眞。

② p 眞 q 假時，$p \to q$ 爲假。

③ p 假 q 眞時，$p \to q$ 爲眞。

④ p 假 q 假時，$p \to q$ 爲眞。

故　$p \to q$ 的眞假值如右：

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

※ **其中只有當「p 眞 q 假」時，$p \to q$ 方爲假**，其他三種情形 $p \to q$ 均爲眞。

4. $p \leftrightarrow q$ 的真假值：

因爲 $p \leftrightarrow q$ 就是「$p \to q$ 且 $q \to p$」，所以當 p，q 都爲眞或都爲假的時候，$p \leftrightarrow q$ 才會是眞，而當 p，q 二者之中恰有一個爲眞時，$p \leftrightarrow q$ 就爲假。其眞值表列出如右：

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

精選試題

【 題一 】

把下面敍述寫成命題形式（若……則……）：

(1)好學生一定不逃學。　(2)有收入的國民必須繳納所得稅。

(3)有公民權的人可以投票。　(4)“嬉皮”都留長頭髮。

(5)植物不能缺水。　(6)人是生物。

【解】(1)若是好學生，則一定不逃學。

(2)若是有收入的國民，則必須繳納所得稅。

(3)若是有公民權的人，則可以投票。

(4)若是“嬉皮”，則留長髮。

(5)若是植物，則不能缺水。

(6)若是人，則是生物。

【 題二 】

設 p，q，r 分別表下列三個敍述：

p：今天是中秋節　q：月亮不圓　r：天上有雲　　試寫出

(1) $p \wedge q$　(2) $q \vee r$　(3) $\sim p \rightarrow q$

(4) $\sim p \wedge \sim r$　(5) $q \rightarrow \sim p$　(6) $p \rightarrow (q \vee r)$

【解】(1)今天是中秋節，可是月亮不圓。　(2)月亮不圓或天上有雲。

(3)若今天不是中秋節，則月亮不圓。　(4)月圓且天上無雲。

(5)若月亮不圓，則今天不是中秋節。

(6)若今天是中秋節，則月不圓或天上有雲。

【 題三 】

設 p 表「$x=3$」，q 表「$y<2$」，試描述下列各複合敍述：

(1) $\sim p$　(2) $\sim q$　(3) $p \vee q$　(4) $p \wedge \sim q$

(5) $p \rightarrow q$　(6) $q \rightarrow p$　(7) $\sim p \rightarrow q$　(8) $\sim q \rightarrow \sim p$

【解】(1) $x \neq 3$　(2) $y \geqq 2$　(3) $x=3$ 或 $y<2$

(4) $x=3$ 且 $y \geqq 2$　(5)若 $x=3$，則 $y<2$　(6)若 $y<2$，則 $x=3$

(7)若 $x \neq 3$，則 $y<2$　(8)若 $y \geqq 2$，則 $x \neq 3$