

數 學 講 義

第 一 回

106160-1



社 團 法 人 考 友 社 出 版 行 發 行

數學講義 第一回



第一講 數列與級數.....	1
命題大綱.....	1
重點整理.....	2
一、數.....	2
二、數列與級數.....	27
三、指數與對數.....	42
精選試題.....	51

第一講 數列與級數



一、數

- (一)整數
- (二)有理數與無理數
- (三)實數與絕對值
- (四)循環小數
- (五)複數與虛數

二、數列與級數

- (一)數列與級數
- (二)等差數列與級數
- (三)等比數列與級數

三、指數與對數

- (一)指數
- (二)對數



一、數

(一)整數：

1. 整數的基本性質：

(1) 定義：

① 正整數：

又叫自然數，例如 1，2，3，4…。

② 負整數：

係指 -1，-2，-3，-4…等。

③ 零：0。

④ 整數：

正整數連同零和負整數之合稱。

(2) 整數運算：設 a 、 b 、 c 均為整數。

① 封閉性：

$(a+b)$ 、 $(a-b)$ 、 $(a \times b)$ 均為整數。

② 交換律：

$$A. a + b = b + a$$

$$B. a \times b = b \times a$$

③ 結合律：

$$A. (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$B. (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

④ 分配律：

$$a \times (b + c) = ab + ac$$

⑤ 消去律：

A. 若 $a + c = b + c$ ，則 $a = b$ 。

B. 若 $ac = bc$ ，則 $a = b$ ，但 $c \neq 0$ 。

⑥ 三一律：

$a > b$ ， $a = b$ ， $a < b$ ，三式中恰有一式成立。

⑦ 遞移律：

A. 若 $a > b$, $b > c$, 則 $a > c$ 。

B. 若 $a < b$, $b < c$, 則 $a < c$ 。

⑧ 加法律：

$$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$$

⑨ 乘法律：

A. 若 $c > 0$, 則 $a > b \Leftrightarrow ac > bc$ 。

B. 若 $c < 0$, 則 $a > b \Leftrightarrow ac < bc$ 。

⑩ 設 a , b 均為整數 , 若 $a \neq b$, 則 $|a - b| \geq 1$ 。

(3) 餘數：

① 被除數 = 除數 \times 商 + 餘數。

② 商數和餘數為非負整數 , 且餘數小於除數。

③ 設 a , b 為整數 , $b \neq 0$:

A. 以 b 去除 a , 會得到唯一的一組商數 q 及餘數 r , 使得

$$a = bq + r , \quad 0 \leq r < |b| 。$$

B. a 可被 b 整除 , 符號記為 $b|a$ 。

④ $b|a$ 且 $a|c$ 則 $\Rightarrow b|c$ 。

2. 倍數：

(1) 內涵：

① 若 $c = ab$, 且 a 、 b 、 c 為非零整數：

A. a 、 b 是 c 的因數。

B. c 是 a 、 b 的倍數。

② 若 $a|b$ (b 可被 a 整除) , 則 a 為 b 的因數 , b 為 a 的倍數。例如：
: $2|18$:

A. 2 為 18 的因數。

B. 18 為 2 的倍數。

(2) 整數倍數判定法：

① 2 的倍數：

個位數為 2 的倍數。

② 3 的倍數：

A. 各位數字和為 3 的倍數。

B. 【例題】：

(A) 下列何數不是 3 的倍數？ (A)1005 (B)444 (C)842

(D)10101。

Ans : (C)。

【解析】(A) $1005=1+0+0+5=6$ ，是 3 的倍數。

(B) $444=4+4+4=12$ ，是 3 的倍數。

(C) $842=8+4+2=14$ ，不是 3 的倍數。

(D) $10101=1+0+1+0+1=3$ ，是 3 的倍數。

(B) 下列何者是 2 的倍數也是 3 的倍數？ (A)216 (B)653

(C)568 (D)435。

Ans : (A)。

【解析】2 的倍數，個位數要是偶數，所以只有 216、568 二數。

3 的倍數，各位數字和要是 3 的倍數， $216=2+1+6=9$ ，是

3 的倍數， $568=5+6+8=19$ ，不是 3 的倍數，所以答案選

(A)。

③ 4 的倍數：

A. 末二位數為 4 的倍數。

B. 下列哪一個數不是 4 的倍數？ (A)548 (B)1500 (C)336 (D)2078

。

Ans : (D)。

【解析】(A) $548 \rightarrow 48$ ，是 4 的倍數。

(B) $1500 \rightarrow 00$ ，是 4 的倍數。

(C) $336 \rightarrow 36$ ，是 4 的倍數。

(D) $2078 \rightarrow 78$ ，不是 4 的倍數。

④ 5 的倍數：

個位數為 0 或 5。

⑤ 6 的倍數：

為 2 的倍數又為 3 的倍數。

⑥ 7 的倍數：

A. 個位數向左，每三位為一區間，則（第奇數個區間和）－（第偶數個區間和）為 7 的倍數。

B. 【例題】下列何者為 7 的倍數？ (A) 231 (B) 12345 (C) 12345678 (D) 8547936877。

Ans : (A)。

【解析】(A)231 正好是 3 位數，沒辦法減去前幾位數的和，所以直接除以 7， $231 \div 7=33$ 餘 0，所以 231 是 7 的倍

數。

(B)12345 從個位數 5 算起往前算 3 位得到 3 個數 345，剩下的前幾位數 12， $(3+4+5)-(1+2)=9$ ，9 非 7 的倍數，所以 12345 不是 7 的倍數。

(C)將 12345678 分成 12，345，678。 $(6+7+8)+(1+2)-(3+4+5)=12$ ， \therefore 12345678 不是 7 的倍數。

(D)8547936877 分爲 8，547，936，877。 $(8+7+7)+(5+4+7)-(9+3+6)-(8)=12$ ，不是 7 之倍數， \therefore 8547936877 不是 7 的倍數。

⑦ 8 的倍數：

末三位數爲 8 的倍數。

⑧ 9 的倍數：

A. 各位數字和爲 9 的倍數。

B. 【例題】判斷下列數字哪些是 9 的倍數？

(A)247023846：

Ans：2+4+7+0+2+3+8+4+6=36，36 爲 9 的倍數

\therefore 247023846 爲 9 的倍數。

(B)645×7329：

Ans：6+4+5=15，爲 3 的倍數。

7+3+2+9=21，爲 3 的倍數。

$3 \times 3 = 9$ ，爲 9 的倍數。

\therefore 645×7329 爲 9 的倍數。

(C) 3^{101} ：

Ans： $3^{101} = 3^2 \times 3^{99} = 9 \times 3^{99}$ ，爲 9 的倍數。

$\therefore 3^{101}$ 爲 9 的倍數。

(D) $986^3 + 814^3$ ：

Ans：利用 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

得 $986^3 + 814^3 = (986+814)(986^2 - 986 \times 814 + 814^2)$

$= (1800)(986^2 - 986 \times 814 + 814^2)$ ，爲 9 的倍數。

$\therefore 986^3 + 814^3$ 爲 9 的倍數。

(E) $10^{90} + 1$ ：

Ans： $10^3 + 1 = 1001$ ， $10^4 + 1 = 10001$ ，...

數字和=2，不是 9 的倍數。

$\therefore 10^{90} + 1$ 不是 9 的倍數。

⑨ 11 的倍數：



壹、選擇題

- (C) 1. 化簡 $1 + \frac{1}{2} \log_9 25 + \log_9 50 - 3 \log_9 5 - \log_9 2$ 後，所得之答案為何？ (A) 0
(B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2。

【解析】 $= \log_9 9 + \log_9 25^{\frac{1}{2}} + \log_9 50 - \log_9 5^3 - \log_9 2$
 $= \log_9 (9 \times 5 \times 50 \times \frac{1}{125} \times \frac{1}{2})$
 $= \log_9 9$
 $= 1$

- (B) 2. 某四位數 $36\square 4$ 是 3 的倍數，那麼 \square 內的數不可能是下列何者？(A) 2
(B) 3 (C) 5 (D) 8。

【解析】3 的倍數判定原則為各位數字和是 3 的倍數。

- (A) $3624 \rightarrow 3+6+2+4=15$ ，是 3 的倍數。
 (B) $3634 \rightarrow 3+6+3+4=16$ ，不是 3 的倍數。
 (C) $3654 \rightarrow 3+6+5+4=18$ ，是 3 的倍數。
 (D) $3684 \rightarrow 3+6+8+4=21$ ，是 3 的倍數。

- (D) 3. 某五位數 $65\square 34$ ，既是 3 的倍數，也是 11 的倍數，則 \square 之值為何？
(A) 0 (B) 3 (C) 6 (D) 9。

【解析】3 的倍數判定原則為各位數字和是 3 的倍數。

- (A) $65034 \rightarrow 6+5+0+3+4=18$ ，是 3 的倍數。
 (B) $65334 \rightarrow 6+5+3+3+4=21$ ，是 3 的倍數。
 (C) $65634 \rightarrow 6+5+6+3+4=24$ ，是 3 的倍數。
 (D) $65934 \rightarrow 6+5+9+3+4=27$ ，是 3 的倍數。

11 倍數判定原則為 (奇數位的數字和) - (偶數位的數字和) 為 11 的倍數。

- (A) $65034 \rightarrow (4+0+6)-(3+5)=2$ ，不是 11 的倍數。
 (B) $65334 \rightarrow (4+3+6)-(3+5)=5$ ，不是 11 的倍數。

106160-1

(C) $65634 \rightarrow (4+6+6)-(3+5)=8$ ，不是 11 的倍數。

(D) $65934 \rightarrow (4+9+6)-(3+5)=11$ ，是 11 的倍數。

- (A) 4. 等差級數 $1 + 7 + 13 + \dots +$ (第 20 項) 之和為多少? (A) 1160 (B) 1570 (C) 2153 (D) 958。

【解析】 $a_1 = 1, d = 7 - 1 = 6$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2 \times 1 + (20-1) \times 6)$$

$$S_{20} = 1160$$

- (D) 5. 下列何者錯誤? (A) $\log_{\frac{1}{3}} 2 = \log_3 \frac{1}{2}$ (B) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} = \log_3 2$ (C) $\log_3 2 \cdot \log_2 3 = 1$
(D) $\log_3 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} = 1$ 。

【解析】(A) $\log_{\frac{1}{3}} 2 = \log_{3^{-1}} 2 = -\log_3 2$ ， $\log_3 \frac{1}{2} = -\log_3 2$ ， $\therefore \log_{\frac{1}{3}} 2 = \log_3 \frac{1}{2}$ 。

(B) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} = \log_{3^{-1}} 2^{-1} = \log_3 2$ 。

(C) $\log_3 2 \cdot \log_2 3 = 1$ 。

(D) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} = \log_{3^{-1}} 2^{-1} = \log_3 2$ ， $\log_3 2 \cdot \log_3 2 \neq 1$ 。

- (B) 6. 下列何者錯誤? (A) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8 = 3$ (B) $(\log_2 3)^4 \cdot (\log_3 2) = 4$
(C) $3 = 5^{\log_5 3} = \log_7 7^3$ (D) $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{5} = \log_7 5 = \log_{49} 25$ 。

【解析】 $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{5} = \log_{7^{\frac{1}{2}}} 5^{\frac{1}{2}} = \log_7 5$

$$\log_{49} 25 = \log_{7^2} 5^2 = \log_7 5$$

- (C) 7. 若六位數 $92a92b$ 可被 9 整除，則 $a+b$ 之值為何? (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7。

【解析】 $92a92b$ 可被 9 整除， $\therefore 9+2+a+9+2+b$ 可被 9 整除

$\Rightarrow 22+a+b$ 可被 9 整除

僅當 $a+b=5$ 時， $22+a+b=27$ 可被 9 整除，故選(C)。