數學講義

第一回

106170-1

社團法人 考友社 出版發行

數學講義 第一回

目錄

第一講　直角坐標系

命題重點

一、直線坐標與直角坐標

㈠直線上的點坐標(數線)

㈡直角坐標系

二、函數圖形

㈠函數之定義

㈡函數圖形

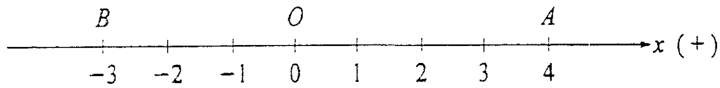
㈢函數圖形之判別

重點整理

一、直線坐標與直角坐標

(一)直線上的點坐標(數線)：

1.在一條直線上，設 O 爲原點，決定單位長後，以向右方爲正向方向，則形成一數線，如下圖：



2.表示法：

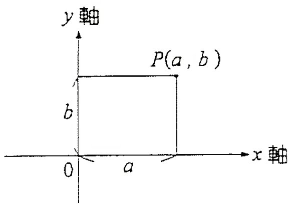
(1) A 點坐標爲 4，以 $A(4)$表示。

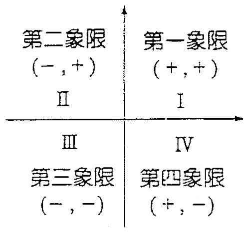
(2) B 點坐標爲−3，以 $B(-3)$表示。

3.距離公式：設有相異兩點 $A(a)$，$B(b)$，則 A，B 兩點距離爲 $|a-b|$，記爲$\overline{AB}=|a-b|$。

4.中點公式：設有相異兩點 $A(a)$，$B(b)$，若 A，B 中點爲 M，則 M 坐標爲 $\frac{a+b}{2}$，記爲 $M(\frac{a+b}{2})$。

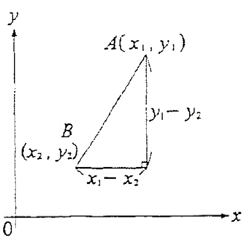
(二)直角坐標系：取二條互相垂直的數線，且於原點 0 重合，水平線爲 x 軸(橫軸)，鉛垂線爲 y 軸(縱軸)。原點之右方爲正，左方爲負，上方爲正，下方爲負，則平面上任何一點都可以用一個數對來表示，如 $P(a，b)$。此平面爲直角坐標系。





1.距離公式：$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$ 爲平面上任意兩點，則：

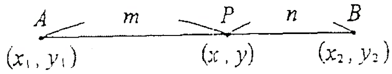
$\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$



2.中點公式：$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$ 爲平面上任意兩點，若 $\overline{AB}$ 中點爲 M，則 M 之坐標爲 $(\frac{x_1+x_2}{2}，\frac{y_1+y_2}{2})$

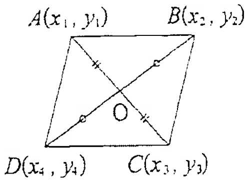
3.分點公式：$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$ 若 $A-P-B$ 且 $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\frac{m}{n}$，則$P(x，y)$坐標爲：

$$\begin{cases} x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m+n} \\ y = \dfrac{ny_1 + my_2}{m+n} \end{cases}$$



4.平行四邊形關係：有一平行四邊形$\square ABCD$，如圖示，連接$\overline{AC}$，$\overline{BD}$交點於 O。平行四邊形中對角線互相平分，$\overline{AO} = \overline{OC}$且$\overline{DO} = \overline{OB}$

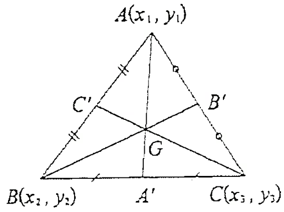
$$\Rightarrow \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right) = \left(\frac{x_2 + x_4}{2}, \frac{y_2 + y_4}{2}\right)$$



則$\begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \\ y_1 + y_3 = y_2 + y_4 \end{cases} \Rightarrow A + C = B + D$ (對角坐標和相等)

5.三角形重心坐標與性質：

(1)ΔABC中，設$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$C(x_3，y_3)$若 G 爲ΔABC之重心，則 G 坐標爲$\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$。



(2)性質：

①三角形三中線之交點爲重心。

② $\overline{AG} = \dfrac{2}{3}\overline{AA'}$

$\overline{BG} = \dfrac{2}{3}\overline{BB'}$

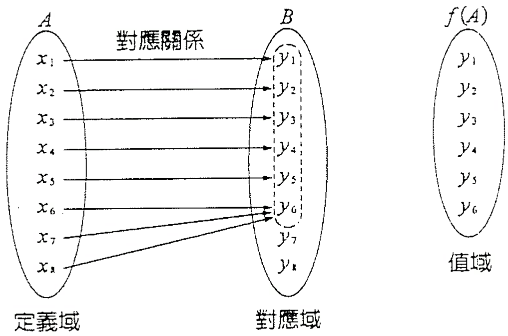
$\overline{CG} = \dfrac{2}{3}\overline{CC'}$

③面積：$\Delta AGC = \Delta BGC = \Delta AGB = \dfrac{1}{3}\Delta ABC$

二、函數圖形

(一)函數之定義：

1.若 y 是隨著 x 的不同而改變，稱爲 y 是 x 的函數，記爲 $y = f(x)$。其中 x 爲自變數，y 爲應變數。

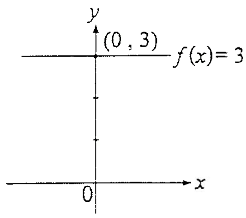


2.若 A，B 爲兩個非空集合，對任何一個 x 屬於 $A(\forall x \in A)$，使得 B 中恰有一

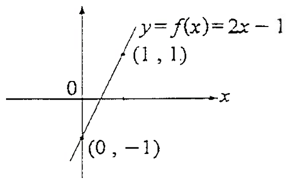
個元素 y 與之對應。這種關係稱爲「由 A 映至 B 的函數」，記爲 $f: A \to B$ 或 $y=f(x)$ ：其中 A 稱爲「定義域」，B 稱爲「對應域」，所有函數值所形成的集合稱爲「值域」。以 $f(A)$ 表示。

(二)**函數圖形：**

1.常數函數： $y=f(x)=c$ ，其圖形爲通過 $(0，c)$ 之水平線。



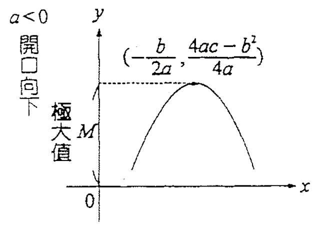
2.一次函數： $y=f(x)=ax+b \quad (a \neq 0)$ ，其圖形爲一直線。一次函數又稱爲線性函數。

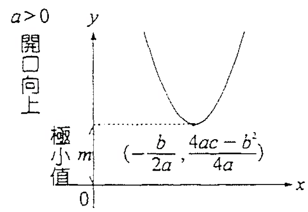


3.二次函數： $y=f(x)=ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$ 圖形爲拋物線。

(1) $\begin{cases} a>0\text{，開口向上之拋物線，有極小值}m=\dfrac{4ac-b^2}{4a} \\ a<0\text{，開口向下之拋物線，有極大值}M=\dfrac{4ac-b^2}{4a} \end{cases}$

(2)二次函數之配方：



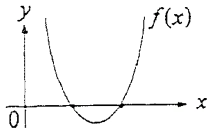
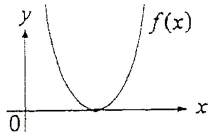
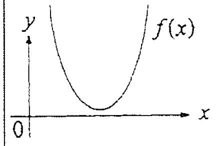


$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2+bx+c \\
&= a(x^2+\frac{b}{a}x)+c \\
&= a[x^2+2x \cdot \frac{b}{2a}+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2]+c \\
&= a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}]+c \\
&= a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a} \\
&= a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}
\end{aligned}
$$

頂點坐標 $(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a})$

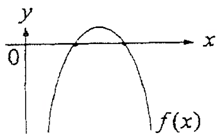
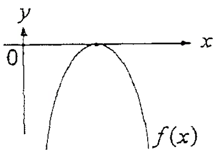
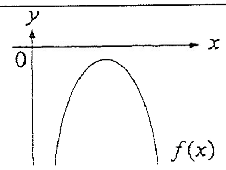
(3)二次函數之係數，判別式與圖形：$f(x)=ax^2+bx+c$，(a、b、$c\in R$，且 $a\neq 0$)，令判別式$=b^2-4ac$

①

條件	$a>0$ $b^2-4ac>0$	$a>0$ $b^2-4ac=0$	$a>0$ $b^2-4ac<0$
圖形			
說明	開口向上之拋物線與 x 軸有二個交點	開口向上之拋物線與 x 軸僅交於一點	開口向上之拋物線與 x 軸不相交
極値	極小値 $m=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	極小値 $m=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	極小値 $m=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

註：當 $a>0$ 時，圖形開口向上。判別式 b^2-4ac 決定與 x 軸之關係。
若 $f(x)$恒正時，即$f(x)>0\Rightarrow a>0$且$b^2-4ac<0$

②

條件	$a<0$ $b^2-4ac>0$	$a<0$ $b^2-4ac=0$	$a<0$ $b^2-4ac<0$
圖形			
說明	開口向下之拋物線與 x 軸有二個交點	開口向下之拋物線與 x 軸僅交於一點	開口向下之拋物線與 x 軸不相交
極値	極小値 $M=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	極小値 $M=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	極小値 $M=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

註：若 $f(x)$ 恆負時，即 $f(x)<0\Rightarrow a<0$且$b^2-4ac<0$

(三)**函數圖形之判別**：方程式 $f(x,y)=0$，若 x 爲自變量，$a\in R$，在點$(a,0)$所作的鉛垂線與曲線 $f(x,y)=0$ 的圖形僅有一個交點，則曲線爲 x 的函數圖形。

【範例】

一、設 $A(-3,-7)$，$B(-1,2)$，$C(4,3)$，若四邊形 $ABCD$ 爲平行四邊形，求 D 點坐標。

答：設 D 點坐標爲 (x,y)

已知 $A(-3,-7)$，$B(-1,2)$，$C(4,3)$

若四邊形 $ABCD$ 爲平行四邊形，則

$x=(-3)+4-(-1)=2$

$y=(-7)+3-2=-6$

$\therefore$ D點坐標爲$(2,-6)$

二、設函數 $f(x)=\begin{cases} x-3，當x\geq 2 \\ 2-x+x^2，當|x|<2 \\ 4，當x\leq -2 \end{cases}$，則$f(4+\sqrt{2})+f(\sqrt{2})+f(-4)$之值爲何？

答： $f(4+\sqrt{2})=(4+\sqrt{2})-3=1+\sqrt{2}$

$f(\sqrt{2})=2-\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=4-\sqrt{2}$

$f(-4)=4$

$\therefore$ $f(4+\sqrt{2})+f(2)+f(-4)$

$=(1+\sqrt{2})+(4-\sqrt{2})+4=9$

三、求函數 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$ 的定義域。

答： $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$ 有意義

$\Rightarrow$ $x^2-x-2>0$

$\Rightarrow$ $(x-2)(x+1)>0$

$\Rightarrow$ $x>2$或$x<-1$

$\therefore$ 定義域爲$\{x|x>2或x<-1\}$

四、已知 $A(3,-5)$，$B(-7,4)$，且P點在$\overline{AB}$上，又$\overline{AB}:\overline{AP}=7:4$，求 P 點坐標。

答： $\because$ $\overline{AB}:\overline{AP}=7:4$

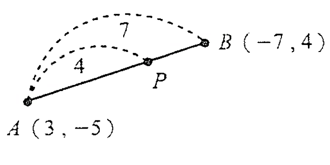
$\Rightarrow$ $\overline{AP}:\overline{PB}=4:3$

又$A(3,-5)$，$B(-7,4)$

設 P 點坐標爲$(x，y)$，則

$x=\dfrac{3\cdot 3+4\cdot(-7)}{4+3}$

$=-\dfrac{19}{7}$



$y=\dfrac{3\cdot(-5)+4\cdot 4}{4+3}$

$=\dfrac{1}{7}$

$\therefore$ P點坐標爲$(-\dfrac{19}{7},\dfrac{1}{7})$

五、設 $P(3,-5)$，$Q(-2,7)$，求$\overline{PQ}$之長。

答： $\overline{PQ}=\sqrt{[3-(-2)]^2+[(-5)-7]^2}$

精選試題

(C) 1. 設點$A=(5，3)$，點$B=(2，-6)$，且M是$\overline{AB}$線段的中點，若 M 點的坐標爲$(x，y)$，則下列何者錯誤？
(A) M 在第四象限 (B) $x-y>0$ (C) $x+y>5$ (D) $xy<10$。

(A) 2. 設$f(x)=3x-1$，$g(x)=x^2$，令$a=f(g(1))$，$b=g(f(1))$，則$a+b$之值爲
(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12。

(C) 3. 設二次函數$f(x)=ax^2+bx+3$，當$x=2$時，$f(x)$有極大值 7，則$f(1)=$
(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 8。

【解析】$\because$ 當$x=2$時，$f(x)$有極大值7
$\Rightarrow$ $f(x)=ax^2+bx+3$圖形頂點爲$(2，7)$
即$f(x)=ax^2+bx+3=a(x-2)^2+7=ax^2-4ax+(4a+7)$
比較常數項得$4a+7=3$ $\Rightarrow$ $a=-1$
故得$f(x)=-(x-2)^2+7$ $\therefore$ $f(1)=-(1-2)^2+7=6$

(C) 4. 設$y=2^x$與二直線$y=2$，$y=8$的交點爲P與Q，則$\overline{PQ}$的長等於
(A) $\sqrt{10}$ (B) 5 (C) $2\sqrt{10}$ (D) 10。

【解析】由$\begin{cases} y=2^x \\ y=2 \end{cases}$解得$P$坐標爲$(1，2)$

由$\begin{cases} y=2^x \\ y=8 \end{cases}$解得$Q$坐標爲$(3，8)$

$\therefore$ $\overline{PQ}=\sqrt{(1-3)^2+(2-8)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

(D) 5. 已知函數$f(x)=\begin{cases} 3x+2，x>5 \\ x^2-2，-1<x\le 5 \\ 4x-1，x\le -1 \end{cases}$，則$f(5)+f(0)+f(-3)$等於
(A) 18 (B) -5 (C) 7 (D) 8。

(A) 6. 若$f(x+2)=\dfrac{x+3}{x+4}$，則$f(\dfrac{1}{2})=$
(A) $\dfrac{3}{5}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{3}{4}$ (D) $\dfrac{7}{9}$。

【解析】令$x+2=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $x=-\dfrac{3}{2}$

$$\therefore\quad f(\frac{1}{2})=f(-\frac{3}{2}+2)=\frac{-\frac{3}{2}+3}{-\frac{3}{2}+4}=\frac{3}{5}$$

(A) 7. 若 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，則 $f(\dfrac{1}{2})$ 之值等於

(A) $\dfrac{17}{4}$ (B) $\dfrac{15}{4}$ (C) $\dfrac{13}{4}$ (D) $\dfrac{11}{4}$ 。

(B) 8. 若函數 $y=x^2+(k-2)x+(2-k)$ 之圖形與 x 軸不相交，則 k 之範圍爲

(A) $k=2$ 或 -2 (B) $-2<k<2$ (C) $k<-2$ 或 $k>2$ (D) $k<-1$ 或 $k>3$ 。

【解析】利用：$y=ax^2+bx+c$ 圖形與 x 軸不相交，則 $b^2-4ac<0$

$\because\ y=x^2+(k-2)x+(2-k)$ 圖形與 x 軸不相交

$\Rightarrow\ (k-2)^2-4\cdot 1\cdot(2-k)<0\ \Rightarrow\ (k-2)(k+2)<0$

$\therefore\ -2<k<2$

(A) 9. 函數 $f(x)=x^2-x-6$ 的圖形與 x 軸的交點坐標爲

(A) $(-2，0)$，$(3，0)$ (B) $(-3，0)$，$(2，0)$ (C) $(-2，0)$，$(-3，0)$

(D) $(2，0)$，$(3，0)$ 。

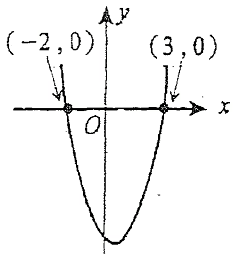
【解析】$\because$ 與 x 軸交點之 y 坐標爲 0

由 $f(x)=0$

$\Rightarrow\ x^2-x-6=0$

$\Rightarrow\ (x+2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-2$ 或 3



(D) 10. 設 $f(x)=2x^3-3x^2-4x+7$，則 $f(f(\sqrt{2}))$ 之值爲

(A) $-\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}-1$ (C) 1 (D) 2 。

【解析】$f(\sqrt{2})=2(\sqrt{2})^3-3(\sqrt{2})^2-4\sqrt{2}+7=4\sqrt{2}-6-4\sqrt{2}+7=1$

$\therefore\ f(f(\sqrt{2}))=f(1)=2\cdot 1^3-3\cdot 1^2-4\cdot 1+7=2$

(A) 11. 設 $A(-1，2)$，$B(3，2)$，$C(-1，0)$，則 ΔABC 之周長爲

(A) $6+2\sqrt{5}$ (B) $4+3\sqrt{5}$ (C) $8+2\sqrt{5}$ (D) 10 。

(A) 12. 平面上 $A(-3，-1)$，$B(1，3)$，若 $A-P-B$，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:2$，則 P 坐標爲

(A) $(-\dfrac{3}{5},\dfrac{7}{5})$ (B) $(\dfrac{3}{5},-\dfrac{7}{5})$ (C) $(-\dfrac{3}{5},-\dfrac{7}{5})$ (D) $(\dfrac{3}{5},\dfrac{7}{5})$ 。

(B) 13. 關於函數 $f(x)=x^3+2$ 之描述，下列何者錯誤？

(A)點 $(2，10)$ 落於 f 的圖形上 (B)點 $(-1，f(-1))$ 在第三象限

(C) $f(-3)<f(-2)$ (D) $f(0)>0$ 。

(B) 14. 坐標平面上兩點 $P(1，3)$ 和 $Q(2，5)$ 的直線距離爲何？

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) 3 (D) 5 。